ミニチュア 6

奇数距離

定理. 平面上の四点で、どの二点間の距離も奇数のものはない。

証明. 背理法で示すため、ある四点が存在して、どの二点間の距離も奇数だったとする。四点のうちひとつを原点 $\mathbf{0}$ にとり、残り三点を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ としよう。このとき $\|\mathbf{a}\|$, $\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{c}\|$, $\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{b}-\mathbf{c}\|$ および $\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\|$ はみな奇数である。ここで $\|\mathbf{x}\|$ はベクトル $\mathbf{x}$ の長さ ($\mathbf{x}$ と $\mathbf{0}$ のユークリッド距離) とする。

まず m が奇数ならば、$m^2 \equiv 1 \pmod 8$ であることに注意しよう (ここで $\equiv$ は合同式の等号で、$x \equiv y \pmod k$ とは k が $x-y$ を割り切るということである[1])。したがって上記の距離の自乗は、どれも 8 を法として 1 と合同である。

次に余弦定理を用いる。すなわち、二つのベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ は必ず

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

をみたす。これを $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ と $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ に適用して、

$$2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2 \equiv 1 \pmod 8$$

を得る。同様の式が $2\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ と $2\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ についても成り立つ。

[1](訳注) 日本語では「k を法として x と y は合同」ともいう。

行列 B を

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \\ \langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{b} \rangle & \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \end{pmatrix}$$

と定めよう。すると $2B$ は 8 を法として次の行列と合同である。

$$R := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

計算すると $\det(R) = 4$ だから $\det(2B) \equiv 4 \pmod 8$ となる。(これをみるには、両方の行列式を定義に従って展開したときに現れる $3!$ 個の項を思い浮かべ、$\det(2B)$ と $\det(R)$ の対応する項同士が 8 を法として合同であることに注意する[2]とよい。）したがって $\det(2B) \neq 0$ だから $\det(B) \neq 0$ である。ゆえに $\operatorname{rank}(B) = 3$ を得る。

一方、$B = A^T A$ である。ただし

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

とおいた。すると $\operatorname{rank}(A) \leq 2$ であり、またよく知られているように、行列の積の階数は、積をとる各行列の階数の最小値を超えない (ミニチュア 3 を見よ) 。したがって $\operatorname{rank}(B) \leq 2$ であり、これは矛盾だから証明が完了した。 □

情報源　この結果は次[3]から採った。

R. L. Graham, B. L. Rothschild, and E. G. Straus, *Are there $n+2$ points in E^n with pairwise odd integral distances?*, Amer. Math. Monthly **81** (1974), 21–25.

ここに述べた証明は Moshe Rosenfeld から聞いたものである。

[2](訳注) $a \equiv a'$ かつ $b \equiv b'$ ならば、$a + b \equiv a' + b'$ と $ab \equiv a'b'$ が成り立つ。行列式の定義は付録 C.2 参照。

[3](訳注) この論文の主結果は次の通り。n 次元ユークリッド空間において、どの二点間の距離も奇数であるような $n + 2$ 点が存在するには、$n + 2 \equiv 0 \pmod{16}$ が必要十分である。