交差族の組合せ論とその周辺

徳重 典英（琉球大学教育学部）

1　はじめに

有限集合を固定して、例えば $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とし、その部分集合族 (a family of subsets) $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ を考える。ただし $2^{[n]}$ は $[n]$ の部分集合全体（べき集合）である。部分集合族 $\mathcal{F}$ が交差性の条件

$$F \cap F' \neq \emptyset \tag{1}$$

をみたすとき $\mathcal{F}$ を交差族とよび $|\mathcal{F}|$ をそのサイズという。

問題 1　交差族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ の最大サイズは何か？

それは 2^{n-1} である。$[n]$ の各部分集合 F について、F とその補集合 $[n] \setminus F$ を組にすると、$2^{[n]}$ は 2^{n-1} 個の組に分割される。$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ を交差族としよう。$F \in \mathcal{F}$ なら $[n] \setminus F \notin \mathcal{F}$ だから、$|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$ がわかる。等号成立の $\mathcal{F}$ としては、例えば要素 1 を含む部分集合全体 $\{F \in 2^{[n]} : 1 \in F\}$ をとればよい。このように $|\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F| = 1$ をみたす交差族を「一点を固定する交差族」という。一般に各 $0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}$ について

$$\mathcal{F}_i := \{F \in 2^{[n]} : |F \cap [2i+1]| \geq i+1\} \tag{2}$$

とおくと、これもサイズ 2^{n-1} の交差族である。$\mathcal{F}_0$ は一点を固定するが、$i \geq 1$ ならば $\mathcal{F}_i$ が固定する点はない。

上の問題は難しくないが､部分集合を選ぶ範囲を $2^{[n]}$ から $\binom{[n]}{k} := \{F \subset [n] : |F| = k\}$ に取り替えたらどうだろうか。

問題 2　交差族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ の最大サイズは何か？

もし $n < 2k$ であれば $\binom{[n]}{k}$ 自身が交差族である。また $n \geq 2k$ のとき、要素 1 を固定する k 点部分集合族

$$\mathcal{F} = \left\{ F \in \binom{[n]}{k} : 1 \in F \right\}$$

はサイズ $\binom{n-1}{k-1}$ の交差族である。実は次が成り立つ。

定理 1（Erdős–Ko–Rado [14]）　$n \geq 2k$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が交差族ならば、$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$ である。さらに $n > 2k$ でサイズが $\binom{n-1}{k-1}$ の交差族は一点を固定する。

この結果は Erdős, Ko, Rado の三人がケンブリッジに滞在していた 1930 年代後半に得られたが、論文 [14] が出版されたのは 1960 年代に入ってからだった。Erdős によれば、当時ケンブリッジではこのような結果に誰も興味を示さなかったという。彼らの論文はその後、多数の論文に引用され[1)]交差族に関する研究の出発点のひとつになった。

交差族の研究は (1) のような交差性の条件をみたす部分集合族などについてその最大サイズを評価し、それが決定できる場合には最大サイズを達成する構造を調べる。本稿では典型的な交差性と対応する結果、それらの代数的な証明手法や関連する未解決問題を紹介する。

2　Erdős–Ko–Rado の定理の証明とその q 類似

Erdős–Ko–Rado の定理の証明は簡明で短いものも知られているが、ここでは線形代数を利用する証明を紹介し、次節以降でその手法の拡張や一般化をおこなう。

まずグラフの用語を確認しよう。有限集合 V と E が $E \subset \binom{V}{2}$ をみたすとき、$G = (V, E)$ をグラフ、V を頂点集合、E を辺集合という。二頂点 $x, y \in V$ が $\{x, y\} \in E$ をみたすとき、x と y は隣接するといい $x \sim y$ とかく。頂点 $x \in V$ に対して x と隣接する頂点の個数を x の次数とよび、次数が一定のグラフを正則グラフ（一定値が d ならば d 正則グラフ）という。頂点の部分集合 $I \subset V$ が独立集合とは、I 内のどの 2 点

1）　2023 年 12 月 12 日の時点で MathSciNet によれば 649 の論文、87 のレビューに引用されている。

も隣接しないことである。そのような I の最大サイズを G の独立数とよび $\alpha(G)$ とかく。交差族が独立集合に対応するようなグラフを構成できれば、交差族の最大サイズ問題を独立数の評価問題に落とし込める。

グラフ $G=(V,E)$ の隣接行列 $A=(a_{x,y})$ を定義しよう。これは $|V|$ 次実対称行列で $x,y\in V$ に対してその (x,y) 成分を

$$a_{x,y}=\begin{cases}1 & x\sim y \text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

と定める。隣接行列の固有値はグラフのラベル付けに依存しないから、これをグラフの固有値という。頂点数が N の連結[2]な d 正則グラフの最大固有値は d である。さらに最小固有値を $\lambda_{\min}$ とすると

$$\alpha(G)\le\frac{-\lambda_{\min}}{d-\lambda_{\min}}N \tag{3}$$

が成り立つ。これを Hoffman の ratio bound [29] という。

(3) の証明　グラフ G は連結で N 頂点 d 正則であるとし、その隣接行列を A とする。固有値を $\lambda_1,\dots,\lambda_N$, 対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_N$ とし、これが標準内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して正規直交基底であるとしよう。成分が全部 1 のベクトル $\mathbf{1}$ は固有値 d の固有ベクトルだから $\boldsymbol{v}_1=\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{1}$ としておく。このとき $\lambda_1=d$ である。任意の独立集合 $I\subset V(G)$ をとり、そのサイズを α (つまり $|I|=\alpha\le\alpha(G)$), I の特性ベクトルを $\mathbf{1}_I$ とする。すなわち $(\mathbf{1}_I)_x$ は $x\in I$ なら 1, そうでなければ 0 である。I の 2 点を結ぶ辺はないから $x\sim y$ なら $(\mathbf{1}_I)_x(\mathbf{1}_I)_y=0$ である。したがって

$$\langle\mathbf{1}_I,A\mathbf{1}_I\rangle=\sum_x\sum_y a_{x,y}(\mathbf{1}_I)_x(\mathbf{1}_I)_y=\sum_{x\sim y}(\mathbf{1}_I)_x(\mathbf{1}_I)_y=0$$

である。ここで $\mathbf{1}_I=\sum\alpha_i\boldsymbol{v}_i$ と展開すると

$$\alpha=\langle\mathbf{1}_I,\mathbf{1}_I\rangle=\left\langle\sum\alpha_i\boldsymbol{v}_i,\sum\alpha_i\boldsymbol{v}_i\right\rangle=\sum\alpha_i^2$$

を得る。これと $\langle\mathbf{1}_I,A\mathbf{1}_I\rangle=0$ から

$$0=\left\langle\sum\alpha_i\boldsymbol{v}_i,\sum\alpha_i\lambda_i\boldsymbol{v}\right\rangle=\sum\alpha_i^2\lambda_i\ge d\alpha_1^2+\lambda_{\min}\sum_{i\ge2}\alpha_i^2=d\alpha_1^2+\lambda_{\min}(\alpha-\alpha_1^2)$$

2)　どの 2 頂点も辺を辿って到達できること。

である。この不等式に

$$\alpha = \langle \mathbf{1}_I, \mathbf{1} \rangle = \langle \sum \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sqrt{N}\boldsymbol{v}_1 \rangle = \alpha_1 \sqrt{N}$$

を代入して整理すると ratio bound の不等式 (3) を得る。 □

以下 $n \geq 2k$ を仮定し、Kneser グラフ $G_{n,k} = (V, E)$ を

$$V = \binom{[n]}{k}, \quad E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : x \cap y = \emptyset\}$$

と定める。これは $\binom{n}{k}$ 頂点 $\binom{n-k}{k}$ 正則グラフで、固有値は

$$\left\{(-1)^i \binom{n-k-i}{k-i} : i = 0, 1, \ldots, k\right\},$$

対応する重複度は $\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1}$ である[3)]。特に最大固有値は $\binom{n-k}{k}$, 最小固有値は $-\binom{n-k-1}{k-1}$ で、ratio bound (3) により

$$\alpha(G_{n,k}) \leq \frac{\binom{n-k-1}{k-1}}{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$$

がしたがう。一方、$G_{n,k}$ の独立集合は $\binom{[n]}{k}$ 上の交差族であるから、上の不等式から定理 1 の不等式が得られた。

この証明の利点として、定理 1 の q 類似が同様の方法で得られる。ここで q を素数べきとし、$\mathbb{F}_q$ を q 元体とする。さらに V_n を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間とし、その k 次元部分空間全体を $\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ とかくと $\left|\begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}\right| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ である。ただし

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} := \prod_{i=0}^{k-1} \frac{q^{n-i} - 1}{q^{k-i} - 1}$$

とする。部分空間族 $\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ が交差族であるとは、任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ について

$$\dim(F \cap F') \neq 0$$

が成り立つことである。交差族 $\mathcal{F}$ の最大サイズを求めるために、Kneser グラフの q 類似であるグラフ $G_{n,k}^{(q)} = (V, E)$ を

$$V = \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}, \quad E = \{\{x, y\} \in \begin{bmatrix} V_n \\ 2 \end{bmatrix} : \dim(x \cap y) = 0\}$$

3） 例えば [28] の 6 章参照。

と定める。これは $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 頂点 $\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}$ 正則グラフで、最小固有値は $-\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ である[4)]。このグラフに ratio bound (3) を適用して

$$\alpha(G^{(q)}_{n,k}) \le \frac{\begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

を得る。つまり次のことがわかった。

定理 2（Hsieh [30]） $n \ge 2k$ で $\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ が交差族ならば、$|\mathcal{F}| \le \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ である。

3 測度版 EKR

前節では k 点部分集合族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ のサイズとして部分集合の個数を数えた。ここで k の制限のかわりに集合族 $\mathcal{F}$ を $\Omega := 2^{[n]}$ からとり、部分集合の要素数に応じて重みをつけてその和に注目しよう。このため実数 $p \in (0,1)$ を固定して $F \in \Omega$ の重みを

$$w(F) := p^{|F|}(1-p)^{n-|F|}$$

とし、測度 $\mu_p : 2^\Omega \to [0,1]$ を $\mathcal{F} \in 2^\Omega$ に対して

$$\mu_p(\mathcal{F}) := \sum_{F \in \mathcal{F}} w(F) \tag{4}$$

と定める[5)]。これは

$$\mu_p(\Omega) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

をみたすので確率測度[6)]である。また (2) の $\mathcal{F}_0$ を $\mathcal{F}_0 = \{\{1\} \cup G : G \in 2^{[n]\setminus\{1\}}\}$ と考えると重みが $w(\{1\} \cup G) = p \cdot p^{|G|}(1-p)^{(n-1)-|G|}$ と表せることから

$$\mu_p(\mathcal{F}_0) = p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} = p$$

4） 例えば [28] の 9 章参照。

5） この測度は $[n]$ の各要素を独立ランダムに確率 p で選んで得られるランダム部分集合 X_p が $\mathcal{F}$ に入る確率 $\mathbb{P}[X_p \in \mathcal{F}]$ と解釈できる。

6） 組合せ論の問題としては、単にハイパーグラフの大きさを辺の重みの和で測るというだけで確率測度である必要はないが、確率測度であれば確率論の道具を使える利点がある。一方、重みに負の値も許すことが本質的な場合（例えば [43] の定理 1.2）もある。より一般的な重み付けに関する交差族の結果は [5] に詳しい。この点について質問してくださった方に感謝します。

を得る。実は $p \le \frac{1}{2}$ ならば $\mathcal{F}_0$ より大きい測度をもつ交差族はない。

定理 3　$p \le \frac{1}{2}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が交差族ならば、$\mu_p(\mathcal{F}) \le p$ である。さらに $p < \frac{1}{2}$ で測度が p の交差族は一点を固定する。

定理 3 の条件 $p \le \frac{1}{2}$ は、次の意味で最善である。すなわち、$p > \frac{1}{2}$ ならば交差族 $\tilde{\mathcal{F}}$ を $\tilde{\mathcal{F}} = \{F \in 2^{[n]} : |F| > \frac{n}{2}\}$ と定めると $\lim_{n\to\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 1$ である。

定理 3 の ratio bound を用いた証明を紹介するため、隣接行列を拡張しよう。(3) の証明では隣接行列 $A = (a_{x,y})$ の次の性質を利用した。

(i) A の行和は正で一定。
(ii) $x \not\sim y$ なら $a_{x,y} = 0$.
(iii) A の固有ベクトルからなる直交基底がとれる。

そこでこれらの条件をみたす行列を改めて隣接行列とよぼう（擬隣接行列ともいう)。この定義では $x \sim y$ であっても $a_{x,y} = 1$ を要求しない。また (iii) が成り立つような内積が入っていれば、A は対称行列でなくてもよい。隣接行列の定義をこのように変更しても前節にのべた (3) の証明はそのまま通用する。ただし (3) の d は固有ベクトル $\mathbf{1}$ に対応する固有値に置き換える。以下の証明は Friedgut [26] による。

定理 3 の証明の概略　定理 1 の証明に Kneser グラフを使ったように、定理 3 の証明のためにグラフ $G = (V, E)$ を構成しよう。頂点集合は $V = 2^{[n]}$ とし、辺集合は $E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : x \cap y = \emptyset\}$ とする。このとき G の独立集合 $I \subset V$ は交差族である。このグラフの隣接行列 A を

$$A := A_1 \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_1 \quad (n \text{ times})$$

と定義する（以下、この右辺を $A_1^{\otimes n}$ ともかく)。ただし

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 - \frac{p}{1-p} & \frac{p}{1-p} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

である。このとき $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ で、条件 (i) が成り立つ。A の定義式右辺の i 番目の A_1 の行、列は $\emptyset, \{i\}$ の順に対応し、したがって A の行、列はそれぞれ

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{4\}, \ldots$$

の順に紐付けられる。この対応で条件 (ii) がみたされることがわかる。条件 (iii) のために μ_p から定まる内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ を $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^V$ に対して

$$\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_p := \sum_{\boldsymbol{x}\in V}(\boldsymbol{u})_x(\boldsymbol{v})_x\,\mu_p(\{x\})$$

と定義する。このとき $\langle\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v}\rangle_p=\langle A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle_p$ で (iii) が成り立つ。

行列 A の固有値、固有ベクトルは Kneser グラフの場合よりも容易に得られる。実際、$x\in 2^{[n]}$ に対応する固有値は $(-\frac{p}{1-p})^{|x|}$ で、特に $\mathbf{1}$ に対応する固有値（最大固有値）は 1, 最小固有値は $-\frac{p}{1-p}$ である。したがって ratio bound により

$$\alpha(G)\le\frac{\frac{p}{1-p}}{1+\frac{p}{1-p}}=p$$

を得る。これで定理 3 の不等式が証明できた。 □

定理 3 と定理 1 は、

$$p \iff \frac{k}{n} \tag{5}$$

を介して対応している。実際、$\binom{n-1}{k-1}=\frac{k}{n}\binom{n}{k}$ に注意すると定理 1 は次のように書き換えられる。

> $\frac{k}{n}\le\frac{1}{2}$ で $\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$ が交差族ならば、$|\mathcal{F}|/\binom{n}{k}\le\frac{k}{n}$ である。さらに $\frac{k}{n}<\frac{1}{2}$ でサイズの比（サイズを $\binom{n}{k}$ で割った値）が $\frac{k}{n}$ の交差族は一点を固定する。

このように交差族 $\mathcal{F}$ に関する結果は、$\mathcal{F}\subset\binom{[n]}{k}$ のサイズに関するものと $\mathcal{F}\subset 2^{[n]}$ の μ_p 測度に関するものが (5) を通して対応していることがある。そのような場合には片方の結果が他方を導くのに役立つことが多い。しかし片方の結果から他方の（等価な）結果を自動的に得るようなメタ定理は知られていない。

問題 3　定理 1 と定理 3 を特別な場合に含むような、より一般の定理を見つけよ。

問題 4　定理 3 の q 類似（定理 2 の測度版）を見つけよ。

4　t 交差族

部分集合族 $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ は任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ について $|F \cap F'| \geq t$ をみたすとき、t 交差族という。サイズ $\binom{n-t}{k-t}$ の t 交差族の例として $\{F \in \binom{[n]}{k} : [t] \subset F\}$ がある。このように $|\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F| = t$ をみたす交差族を「t 点を固定する交差族」という。

定理 4　$n \geq (t+1)(k-t+1)$ で $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ が t 交差族ならば、$|\mathcal{F}| \leq \binom{n-t}{k-t}$ である。さらに $n > (t+1)(k-t+1)$ でサイズが $\binom{n-t}{k-t}$ の t 交差族は t 点を固定する。

この結果よりやや弱い主張が Erdős, Ko, Rado [14] や Frankl [19] によって組合せ論的手法で得られていたが、最終的に Wilson [45] は ratio bound を用いて定理 4 を完全に証明した。なお後述する定理 5 は定理 4 を含むもっと強い結果であり、これは組合せ論的な証明しか知られていない。

Wilson の証明ではまず Kneser グラフを一般化して $G_{n,k,t} = (V, E)$ を $V = \binom{[n]}{k}$, $E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : |x \cap y| < t\}$ と定める。このグラフの独立集合は t 交差族なので、独立数を ratio bound で評価したい。それには「よい」隣接行列 $A = (a_{x,y})$ が必要で、$a_{x,y}$ の値を $|x \cap y|$ に応じて「うまく」調整しなければならない。結論だけ書けば

$$A = \sum_{i=0}^{t-1} (-1)^{t-1-i} \binom{k-1-i}{k-t} \binom{n-k-t+i}{k-t}^{-1} B_{k-i}$$

とすればよい。ただし B_j は $\binom{n}{k}$ 次行列で、その (x, y) 成分は $\binom{|x\setminus y|}{j}$ である。この隣接行列に ratio bound を適用すると $n \geq (t+1)(k-t+1)$ ならば目標の上界 $\alpha(G_{n,k,t}) \leq \binom{n-t}{k-t}$ が得られる。さらに固有空間を詳しく見ることで、$n > (t+1)(k-t+1)$ ならば等号を成立させる独立集合が t 点を固定することもわかる[7)]。

実は $n = (t+1)(k-t+1)$ のときは、サイズが $\binom{n-t}{k-t}$ の t 交差族は t 点を固定するものだけではない。ここで $i = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n-t}{2} \rfloor$ に対して、部分集合族 $\mathcal{F}_i$ を

$$\mathcal{F}_i := \left\{ F \in \binom{[n]}{k} : |F \cap [t+2i]| \geq t+i \right\}$$

7)　例えば [28] の 8 章を見よ。

と定めると、これらは t 交差族であり i が異なれば同型でない。ただし 2 つの部分集合族 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ が同型とは、$[n]$ 上の置換 σ が存在して $\mathcal{G} = \{\{\sigma(x) : x \in F\} : F \in \mathcal{F}\}$ をみたすことと定義する。$n \geq (t+1)(k-t+1)$ ならば $\max_i |\mathcal{F}_i| = |\mathcal{F}_0|$ であり、$n = (t+1)(k-t+1)$ ならば $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$ である。$n < 2k-t$ ならば $\binom{[n]}{k}$ は t 交差族であるが、$n \geq 2k-t$ のときの t 交差族の最大サイズは何か？ それは $\max_i |\mathcal{F}_i|$ である。Ahlswede と Khachatrian は純粋に組合せ論的な手法でこの強い結果[8)]を得た。

定理 5（Ahlswede–Khachatrian [2, 3]） $n \geq k \geq t \geq 1, 0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$ とし、$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ を t 交差族とする。もし

$$(k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{i+1}\right) < n < (k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{i}\right)$$

ならば[9)]、$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_i|$ であり、等号成立は同型を除いて $\mathcal{F}_i$ に限る。もし

$$(k-t+1)\left(2+\frac{t-1}{i+1}\right) = n$$

ならば、$|\mathcal{F}| \leq |\mathcal{F}_i| = |\mathcal{F}_{i+1}|$ であり、等号成立は同型を除いて $\mathcal{F}_i$ と $\mathcal{F}_{i+1}$ に限る[10)]。

定理 5 の測度版[11)]を述べるため、t 交差族 $\mathcal{G}_i \subset 2^{[n]}$ $(0 \leq i \leq \frac{n-t}{2})$ を次で定める。

$$\mathcal{G}_i := \left\{G \in 2^{[n]} : |G \cap [t+2i]| \geq t+i\right\}.$$

定理 6 $n \geq t \geq 1, 0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$ とし、$\mathcal{G} \subset 2^{[n]}$ を t 交差族とする。もし

$$\frac{i}{t+2i-1} < p < \frac{i+1}{t+2i+1}$$

ならば、$\mu_p(\mathcal{G}) \leq \mu_p(\mathcal{G}_i)$ であり、等号成立は同型を除いて $\mathcal{G}_i$ に限る。もし

$$p = \frac{i+1}{t+2i+1}$$

ならば、$\mu_p(\mathcal{G}) \leq \mu_p(\mathcal{G}_i) = \mu_p(\mathcal{G}_{i+1})$ であり、等号成立は同型を除いて $\mathcal{G}_i$ と $\mathcal{G}_{i+1}$ に限る[12)]。

8） 定理 5 は特別な場合 ($i=0$ の場合) として定理 4 を含む。
9） ただし $i=0$ のときは $(k-t+1)(t+1) < n$ と読み替える。
10） ただし $i=0$ かつ $t=1$ の場合を除く。
11） 定理 6 は例えば [1, 10, 39, 16] にやや弱い形からより精密な形の定式化が見られる。
12） ただし $i=0$ かつ $t=1$ の場合を除く。

定理 6 の $p \le \frac{1}{t+1}$ $(i=0)$ の場合、つまり定理 4 の測度版は Friedgut [26] によって ratio bound を利用する証明が与えられた。これは前節で述べた定理 3 の証明を拡張したものだが、隣接行列の成分は剰余環 $\mathbb{R}[X]/(X^t)$ からとる。彼は後に隣接行列を実行列として構成する方法も見出し、それは [15] に紹介されている。

問題 5　定理 5 の $n < (t+1)(k-t+1)$ の場合、および定理 6 の $p > \frac{1}{t+1}$ の場合について、代数的な証明を見つけよ[13)]。

$n \ge k \ge t \ge 1$ とし、V_n を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間とする。部分空間族 $\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ が t 交差するとは、任意の $F, F' \in \mathcal{F}$ について $\dim(F \cap F') \ge t$ が成り立つことである。このとき定理 5 の q 類似が ratio bound から得られる。

定理 7（Frankl–Wilson [25]）　$\mathcal{F} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ を t 交差族とする。このとき $n \ge 2k$ ならば $|\mathcal{F}| \le \begin{bmatrix} n-t \\ k-t \end{bmatrix}$ であり、等号成立は $n > 2k$ ならば、ある $T \in \begin{bmatrix} V_n \\ t \end{bmatrix}$ について $\mathcal{F} = \{F \in \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix} : T \subset F\}$ に限る。$2k-t < n \le 2k$ ならば $|\mathcal{F}| \le \begin{bmatrix} 2k-t \\ k \end{bmatrix}$ であり、等号成立は $n < 2k$ ならば、ある $W \in \begin{bmatrix} V \\ 2k-t \end{bmatrix}$ について $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} W \\ k \end{bmatrix}$ に限る。

ちょうど $n = 2k$ の場合の極値構造（サイズ最大の $\mathcal{F}$ の構造）は定理 7 の 2 種類の構造に限られる。これは田中 [37] によってはじめて証明された。

問題 6　定理 7 の組合せ論的な証明を見つけよ。

5　互いに交差する集合族と半正定値計画法

二つの部分集合族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ は、任意の $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ に対して $A \cap B \ne \emptyset$ をみたすとき、互いに交差するという。Pyber は定理 1 を互いに交差する集合族に拡張することを考えた。実際、定理 1 および定理 3 は以下のような自然な拡張をもつ。

13） これには次節で紹介する半正定値計画法が有効かもしれない。

定理 8（[33, 32]） $n \geq 2k \geq 2l$ で $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{k}$ と $\mathcal{B} \subset \binom{[n]}{l}$ が互いに交差するならば、$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{l-1}$ である。

定理 9（[40, 36]） $\frac{1}{2} \geq p_1 \geq p_2$ で $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ と $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ が互いに交差するならば、$\mu_{p_1}(\mathcal{A})\mu_p(\mathcal{B}) \leq p_1 p_2$ である。

同様に定理 2 も拡張できる。これを述べるため、V_n を $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間とし、V_n の部分空間族 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ が互いに交差するとは、任意の $A \in \mathcal{A}$ と $B \in \mathcal{B}$ が $\dim(A \cap B) \neq 0$ をみたすことと定義する。このとき次が成り立つ。

定理 10（Suda–Tanaka [35]） $n \geq 2k \geq 2l$ で $\mathcal{A} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ k \end{bmatrix}$ と $\mathcal{B} \subset \begin{bmatrix} V_n \\ l \end{bmatrix}$ が互いに交差するならば、$|\mathcal{A}||\mathcal{B}| \leq \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-1 \\ l-1 \end{bmatrix}$ である。

定理 8 と定理 9 ははじめ組合せ論的な方法で証明された。また $k = l$ あるいは $p_1 = p_2$ の場合に限ると、これら 3 つの結果は ratio bound の議論を拡張して示すこともできる[14)]。一方、定理 10 の組合せ論的な証明は知られていない。須田と田中は対応する半正定値計画問題を解くことで定理 10 を証明し、同時にこれら 3 つの結果を証明する統一的な枠組みを与えた。半正定値計画法は線形計画法の拡張で、後者の変数が実数を動くのに対して、前者では変数は実対称半正定値行列を動く。線形計画法と同様に半正定値計画でも主問題に対応する双対問題があり、それらの間に弱双対性が成り立つ[15)]。

ここでは定理 9 を例に半正定値計画法がどのように利用できるのかを略述する。やや一般的な設定を扱うため、与えられた二部グラフ G の頂点集合の二部分割を $V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ とし、$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ とおく。頂点の部分集合 $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ が互いに独立であるとは、U_1 と U_2 の間に辺がないことである。そのような集合で測度の積 $\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2)$ が最大となるものを見つけたい。ただし μ_{p_i} は Ω_i 上の任意の測度である。

行と列が Ω でインデックスされた実行列全体を $\mathbb{R}^{\Omega\times\Omega}$, 列ベクトル全体を $\mathbb{R}^{\Omega}$ とかき、$\mathbb{R}^{\Omega_i\times\Omega_j}$ と $\mathbb{R}^{\Omega_i}$ も同様に定める。成分が全部 1 の行列を $J_{i,j} \in \mathbb{R}^{\Omega_i\times\Omega_j}$ とかき、

14） 例えば [24] の 28 章または [41] 参照。
15） 半正定値計画法の概説、入門書として [38, 27] などがある。

$x \in \Omega_i, y \in \Omega_j$ に対して (x,y) 成分のみ 1, その他の成分が 0 の行列を $E_{x,y} \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_j}$ とし、対角成分 (x,x)（ただし $x \in \Omega_i$）が $\mu_{p_i}(\{x\})$ である対角行列を $\Delta_i \in \mathbb{R}^{\Omega_i \times \Omega_i}$ とかく。実対称行列で $\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ に属するもの全体を $S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ とし、$X \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ が半正定値であることを $X \succeq 0$, 成分がすべて非負であることを $X \geq 0$ とかく。$X, Y \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ に対して、その内積を $\mathrm{trace}(X^\mathsf{T} Y)$ と定義し $X \bullet Y$ とかく。

ここで $X \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}$ を変数とする次の半正定値主問題を考える：

$$
\begin{aligned}
\text{(P):}\quad & \text{maximize} && \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X \\
& \text{subject to} && \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 \end{bmatrix} \bullet X = 1, \\
& && \begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} \bullet X = 0 \text{ for } x \in \Omega_1, y \in \Omega_2, x \sim y, \\
& && X \succeq 0,\ X \geq 0.
\end{aligned}
$$

グラフ G の互いに独立な集合 $U_1 \subset \Omega_1, U_2 \subset \Omega_2$ から問題 (P) の実行可能解が得られる。実際、U_i の特性ベクトルを $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^{\Omega_i}$（縦ベクトル）とし、

$$
X_{U_1,U_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_1}(U_1)}}\boldsymbol{x}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_2}(U_2)}}\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_1}(U_1)}}\boldsymbol{x}_1 \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_{p_2}(U_2)}}\boldsymbol{x}_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \in S\mathbb{R}^{\Omega \times \Omega}
$$

とおくと、X_{U_1,U_2} は (P) の実行可能解でその目的関数の値は

$$
\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ \frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & 0 \end{bmatrix} \bullet X_{U_1,U_2} = \sqrt{\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2)}
$$

である。

上に述べた主問題に対応する双対問題は

$$
\begin{aligned}
\text{(D):}\quad & \text{minimize} && \alpha + \beta \\
& \text{subject to} && S := \begin{bmatrix} \alpha\Delta_1 & -\frac{1}{2}\Delta_1 J_{1,2}\Delta_2 \\ -\frac{1}{2}\Delta_2 J_{2,1}\Delta_1 & \beta\Delta_2 \end{bmatrix} \\
& && \qquad + \sum_{x \sim y} \gamma_{x,y} \begin{bmatrix} 0 & E_{x,y} \\ E_{y,x} & 0 \end{bmatrix} - Z \succeq 0, \\
& && Z \geq 0
\end{aligned}
$$

である。ただし $\alpha, \beta, \gamma_{x,y} \in \mathbb{R}$ および $Z \in S\mathbb{R}^{\Omega\times\Omega}$ が変数で、$\sum_{x\sim y}$ は隣接する $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ の和を意味する。このとき $i = 1, 2$ に対して $\Delta_i \bullet (\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i^\top) = \mu_i(U_i)$ であり、$x \sim y$ ならば $E_{x,y} \bullet (\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2^\top) = 0$ である。さらに弱双対性から $\alpha + \beta$ は $\sqrt{\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2)}$ の上界を与えるので、次が成り立つ[16)]。

定理 11 二部グラフ G の二部分割を $V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$ とし、$i = 1, 2$ に対して Ω_i 上の測度を μ_{p_i} とする。グラフ G において $U_1 \subset \Omega_1$ と $U_2 \subset \Omega_2$ が互いに独立で、$(\alpha, \beta, \gamma_{x,y}, Z)$ が双対問題 (D) の実行可能解であれば、

$$\mu_{p_1}(U_1)\mu_{p_2}(U_2) \leq (\alpha + \beta)^2 \tag{6}$$

が成り立つ。

定理 9 を示すため、Ω_1, Ω_2 をそれぞれ $2^{[n]}$ のコピーとし、二部グラフ G を

$$V(G) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2, \quad E(G) = \{\{x, y\} : x \in \Omega_1,\, y \in \Omega_2,\, x \cap y = \emptyset\}$$

と定義する。さらに測度 μ_{p_i} を (4) で定め、この設定で (6) の右辺が最適値 $p_1 p_2$ となるような実行可能解を見つけよう。実際、次の $(\alpha, \beta, \gamma_{x,y}, Z)$ がそれを与え、ここから定理 9 が得られる。

$$\alpha = \beta = \frac{\sqrt{p_1 p_2}}{2}, \quad \sum_{x\sim y} E_{x,y} = \frac{1-p_2}{2} \Delta_1^{\otimes n} A_{1,2}^{\otimes n}, \quad Z = \frac{(p_1 - p_2)p_2}{2\sqrt{p_1 p_2}} \begin{bmatrix} \Delta_1 A_{1,1}^{\otimes n} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ただし

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1-p_1 & 0 \\ 0 & p_1 \end{bmatrix}, \quad A_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p_j}{1-p_i} & \frac{p_j}{1-p_i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする[17)]。

二つの部分集合族 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ は、任意の $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ に対して $|A \cap B| \geq t$ をみたすとき、互いに t 交差するという。同様に互いに t 交差する部分空間族も定義できる。

16） 詳しくは [36] または [24] の 29 章を見よ。
17） 詳しくは [36] または [24] の 30 章を見よ。

定理 8–10 をこの形に拡張することが考えられるが、$k = l$ あるいは $p_1 = p_2$ の場合の一部を除いて未解決である。例えば定理 9 は次の形の拡張が期待できるだろう[18)]。

予想 7 $\frac{1}{t+1} \ge p_1 \ge p_2$ で $\mathcal{A} \subset 2^{[n]}$ と $\mathcal{B} \subset 2^{[n]}$ が互いに t 交差するならば、$\mu_{p_1}(\mathcal{A})\mu_{p_2}(\mathcal{B}) \le (p_1p_2)^t$ である。

6 対称群における交差族

$[n]$ 上の置換全体（n 次対称群）を S_n とかく。置換 $\sigma \in S_n$ を順列 $(\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ と同一視し、二つの置換 σ, τ の共通部分を $\sigma \cap \tau := \{i \in [n] : \sigma(i) = \tau(i)\}$ と定めて S_n における交差族を定義しよう。すなわち、置換の部分集合 $\mathcal{F} \subset S_n$ が交差族であるとは、任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ についてある i が存在して $\sigma(i) = \tau(i)$ をみたすことである。

任意の $i, j \in [n]$ を固定したとき $\{\sigma \in S_n : \sigma(i) = j\}$ はサイズ $(n-1)!$ の交差族である。この形の交差族を S_n の 1-coset とよぶ。S_n の交差族の最大サイズは Deza ら [9] によって決定されたが、さらに Cameron ら [7] と Larose ら [31] は独立に極値構造が一意的であることも示した。まとめると次が成り立つ。

定理 12 $\mathcal{F} \subset S_n$ が交差族ならば、$|\mathcal{F}| \le (n-1)!$ である。等号成立の $\mathcal{F}$ は S_n の 1-coset に限る。

この定理の不等式は clique–coclique bound から容易に得られる[19)]が、ここでは ratio bound から導いてみよう。固定点を持たない置換 (derangement) 全体を

$$D := \{\sigma \in S_n : \text{任意の } i \in [n] \text{ について} \sigma(i) \ne i\}$$

とおき、さらに $d := |D|$ とおく。D による Cayley グラフ $G = (V, E)$ は

$$V = S_n, \quad E = \{\{\sigma, \tau\} : \sigma\tau^{-1} \in D\}$$

と定義される。このグラフで $\sigma \not\sim \tau$ は、ある $i \in [n]$ が存在して $\sigma(i) = \tau(i)$ が成り立

18） 予想 7 は $p_1 = p_2$ かつ $t \ge 14$ のとき [20]、あるいは $p_1 = p_2 \le 1 - \frac{1}{\sqrt[t]{2}}$ かつ $t \ge 2$ のとき [42] 正しいことがわかっている。

19） 例えば [28] の 14 章 p. 261.

つことと同値である。したがって $U \subset V$ が独立集合であるとき、かつそのときに限り U は交差族である。

グラフ G は $n!$ 頂点 d 正則であるが、さらに Renteln [34] は最小固有値が $-\frac{d}{n-1}$ であることを示した。したがって ratio bound から $\alpha(G) \leq (n-1)!$ であり、定理 12 の不等式が得られた。

置換の部分集合 $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族であるとは、任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ について

$$|\{i \in [n] : \sigma(i) = \tau(i)\}| \geq t$$

をみたすことである。例えば $\mathcal{F}_0 := \{\sigma \in S_n : 任意の\ i \in [t]\ について \sigma(i) = i\}$ はサイズ $(n-t)!$ の t 交差族である。ここである $\tau, \tau' \in S_n$ について $\tau\mathcal{F}_0\tau' := \{\tau\sigma\tau' : \sigma \in \mathcal{F}_0\}$ をみたす集合を S_n の t-coset とよぶ。Ellis らはここまでに紹介した交差族に対する手法に対称群の表現論を交えて次の結果を得た。

定理 13（Ellis–Friedgut–Pilpel [12]） $n \gg t$ で $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族ならば、$|\mathcal{F}| \leq (n-t)!$ である。等号成立の $\mathcal{F}$ は S_n の t-coset に限る。

この定理は [12] において $t \geq 4$ ならば $n \geq 2t+1$ で成り立つと予想されており、[13] では $n > \exp(Ct\log t)$ ならば正しいことが示されている。より一般の予想を述べるため、$0 \leq i \leq \frac{n-t}{2}$ に対して $[t+2i]$ 中に少なくとも $t+i$ 個の固定点をもつ S_n の元全体を $\mathcal{F}_i$ とする。次の予想は定理 5 の対称群版と見なせる。

予想 8（[12]） $\mathcal{F} \subset S_n$ が t 交差族ならば、$|\mathcal{F}| \leq \max_i |\mathcal{F}_i|$ である。等号成立の $\mathcal{F}$ はある $\tau, \tau' \in S_n$ に対して $\tau\mathcal{F}_i\tau'$ と表せるものに限る。

$\mathcal{F}_1$ の置換は $[t+2]$ のすべてを固定するものが $(n-t-2)!$ 個、$[t+2]$ の中のちょうど $t+1$ 個を固定するものが $(t+2)(n-t-2)\cdot(n-t-2)!$ 個ある。これと $|\mathcal{F}_0| = (n-t)!$ を比べると、$t \geq 4$ のとき $|\mathcal{F}_0| > |\mathcal{F}_1|$ となるには $n \geq 2t+1$ が必要なことがわかる。

7　3 重交差族

部分集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ は任意の $F, F', F'' \in \mathcal{F}$ について $F \cap F' \cap F'' \neq \emptyset$ をみたすとき、3 重交差族という。そのような $\mathcal{F}$ は（通常の 2 重) 交差族でもあるので定理 3 により $p \leq \frac{1}{2}$ ならば $\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$ である。一方、$p > \frac{1}{2}$ のとき（2 重）交差族の測度は p では抑えられないが、3 重交差族では事情が異なる。

定理 14　$p \leq \frac{2}{3}$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が 3 重交差族ならば、$\mu_p(\mathcal{F}) \leq p$ である。さらに $p < \frac{2}{3}$ で測度が p の 3 重交差族は一点を固定する。

この定理は $p > \frac{2}{3}$ では成り立たない。実際、$\tilde{\mathcal{F}} = \{F \in 2^{[n]} : |F| > \frac{2n}{3}\}$ とおくと、これは 3 重交差族であるが $p > \frac{2}{3}$ のとき $\lim_{n\to\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 1$ である。

定理 14 は Frankl ら [21] により示され、またこれに対応する k グラフおよび q 類似の結果が、それぞれ Frankl [18] および Chowdhury ら [8] によって得られており、これらの証明はすべて組合せ論的なものであった。これに対して Filmus らは [17] においてハイパーグラフの ratio bound を導入し定理 14（の不等式）に代数的な証明を与えた。[43] ではその方法を踏襲して極値構造を決定した。

定理 14 を代数的に扱うため、ハイパーグラフ $\mathcal{H} = (V, E)$ を

$$V = 2^{[n]}, \quad E = \{\{u, v, w\} \in \binom{V}{3} : u \cap v \cap w = \emptyset\}$$

と定める。このとき $U \subset V$ が独立集合であることと、U が 3 重交差族であることは同値である。そこでハイパーグラフ $\mathcal{H}$ に ratio bound を適用したい。しかしそもそもハイパーグラフの「固有値」とは何だろうか？ Filmus らはハイパーグラフから誘導される複数の重み付きグラフを考え、それらの固有値からハイパーグラフの ratio bound を導入して定理 14 に代数的な証明を与えた。同様の試みはほかにもいくつかあるが、現時点では Filmus らのものが最も成功しているように思われる。しかしながら彼らの手法をそのまま適用しても、対応する k グラフや q 類似の結果は得られない。したがって Filmus らの ratio bound あるいはその使い方にもまだ改良の余地があると考えられる。

問題 9　定理 14 の k グラフ版や q 類似を証明できるように、グラフの固有値や ratio bound をハイパーグラフに拡張せよ。

部分集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ は任意の $F, F', F'' \in \mathcal{F}$ について $|F \cap F' \cap F''| \geq t$ をみたすとき、3 重 t 交差族という。各 $i = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n-t}{3} \rfloor$ に対し

$$\mathcal{F}_i := \{F \in 2^{[n]} : |F \cap [3i+t]| \geq 2i+t\}$$

と定めると、これは 3 重 t 交差族である。定理 6 から次のことが予想される。

予想 10　$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が 3 重 t 交差族ならば、$\mu_p(\mathcal{F}) \leq \max_i \mu_p(\mathcal{F}_i)$ である。

ここで $p_0(t) := \frac{2}{\sqrt{4t+9}-1}$ とおくと、$p \leq p_0$ のとき

$$\max_i \mu_p(\mathcal{F}_i) = \mu_p(\mathcal{F}_0) = p^t$$

であり、$p > p_0$ ならば $\max_i \mu_p(\mathcal{F}_i) > p^t$ である。乱歩法という組合せ論的手法で次のことが示されている。

定理 15（[44]）　$t \geq 15$ かつ $p \leq p_0(t)$ で $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ が 3 重 t 交差族ならば、$\mu_p(\mathcal{F}) \leq p^t$ である。さらに $p < p_0(t)$ で測度が p^t の 3 重交差族は t 点を固定する。

問題 11　定理 15 を $t \geq 2$ で証明せよ。また代数的な証明を与えよ。

定理 8 を 3 個の集合族に拡張することも考えられる。次の結果も組合せ論的な議論で示されているが、その手法は定理 15 で用いられているものとは全く異なる。

定理 16（[22]）　$\frac{k}{n} \leq \frac{2}{3}$ で $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subset \binom{[n]}{k}$ が任意の $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ について $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ をみたせば、$|\mathcal{A}||\mathcal{B}||\mathcal{C}| \leq \binom{n-1}{k-1}^3$ である。

問題 12　定理 16 の測度版、q 類似を与えよ[20]。

20）q 類似については geometric spread の構造が詳しくわかれば [22] の手法が使えるかもしれない。

8　文献案内

交差族全般に関する（代数的な手法も含む）概説としては [11] がよい。これは本稿で扱わなかった極値構造の安定性も紹介している。組合せ論寄りの概説では [6, 23] がある。[28] は Erdős–Ko–Rado の定理の拡張や一般化を代数的に扱ったテキスト[21]で、本稿で省略した証明のいくつかが詳しく解説されている。[4] はこれより広い範囲の極値集合論の話題に関する線形代数手法を扱っており、この分野の古典である。ただし内容のほとんどは 1992 年までに書かれた。より新しい話題（例えば半正定値計画法の利用など）については [24] で補うとよいだろう。[46] は [4] が入手困難であった頃に、そのごく一部を日本語で解説したものである。

参考文献

[1] R. Ahlswede, L.H Khachatrian. The diametric theorem in Hamming spaces-optimal anticodes. *Adv. in Appl. Math.*, 20 (1998) 429–449.

[2] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian. The complete intersection theorem for systems of finite sets. *European J. Combin.*, 18 (1997) 125–136.

[3] R. Ahlswede, L.H. Khachatrian. A Pushing–pulling method: new proofs of intersection theorems *Combinatorica*, 19 (1999) 1–15.

[4] L. Babai, P. Frankl. Linear algebra methods in combinatorics. version 2.2. October 2022.

[5] Bey, C., Engel, K.: Old and new results for the weighted t-intersection problem via AK-methods. Numbers, Information and Complexity, Althofer, Ingo, Eds. et al., Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, (2000) 45–74.

[6] P. Borg. Intersecting families of sets and permutations: a survey. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, 21 (2012) 543–559.

[7] P. Cameron, C.Y. Ku. Intersecting families of permutations. *Europ. J. Combin.*, 24 (2003) 881–890.

[8] A. Chowdhury, B. Patkós. Shadows and intersections in vector spaces. *J. Combin. Theory (A)*, 117 (2010) 1095–1106.

[9] M. Deza, P. Frankl. On the maximum number of permutations with given maximal or minimal distance. *J. Combin. Theory (A)*, 22 (1977) 352–360.

[10] I. Dinur, S. Safra. On the Hardness of Approximating Minimum Vertex-Cover. *Annals of Mathematics*, 162 (2005) 439–485.

21） typo に注意しながら読めば代数的組合せ論の入門書としてもよい本である。

[11] D. Ellis. Intersection problems in extremal combinatorics: theorems, techniques and questions old and new. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 481 Cambridge University Press, Cambridge, 2022, 115–173.

[12] D. Ellis, E. Friedgut, H. Pilpel. Intersecting families of permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, 24 (2011) 649–682.

[13] D. Ellis, N. Lifshitz. Approximation by juntas in the symmetric group, and forbidden intersection problems. Duke Math. J. 171 (2022) 1417–1467.

[14] P. Erdős, C. Ko, R. Rado. Intersection theorems for systems of finite sets. *Quart. J. Math. Oxford (2)*, 12 (1961) 313–320.

[15] Y. Filmus. Spectral methods in extremal combinatorics. PhD thesis. University of Toronto 2013.

[16] Y. Filmus. The weighted complete intersection theorem. *J. Combin. Theory (A)*, 151 (2017) 84–101

[17] Y. Filmus, K. Golubev, N. Lifshitz. High dimensional Hoffman bound and applications in extremal combinatorics. *Algebr. Comb.*, 4 (2021) 1005–1026.

[18] P. Frankl. On Sperner families satisfying an additional condition. *J. Combin. Theory (A)*, 20 (1976) 1–11.

[19] P. Frankl. The Erdős–Ko–Rado theorem is true for $n = ckt$. *Combinatorics Vol. I*, 365–375, Colloq. math. Soc. János Bolyai, 18, North–Holland, 1978.

[20] P. Frankl, S. J. Lee, M. Siggers, N. Tokushige. An Erdős–Ko–Rado theorem for cross t-intersecting families. *J. Combin. Theory (A)*, 128 (2014) 207–249.

[21] P. Frankl, N. Tokushige. Weighted multiply intersecting families. *Studia Sci. Math. Hungarica*, 40 (2003) 287–291.

[22] P. Frankl, N. Tokushige. On r-cross intersecting families of sets. Combin. Probab. Comput. 20 (2011) 749–752.

[23] P. Frankl, N. Tokushige. Invitation to intersection problems for finite sets. *J. Combin. Theory (A)*, 144 (2016) 157–211.

[24] P. Frankl, N. Tokushige. Extremal problems for finite sets. Stud. Math. Libr., 86 American Mathematical Society, Providence, RI, 2018, viii+224 pp.

[25] P. Frankl, R. M. Wilson. The Erdős–Ko–Rado theorem for vector spaces. *J. Combin. Theory (A)*, 43 (1986) 228–236.

[26] E. Friedgut. On the measure of intersecting families, uniqueness and stability. *Combinatorica* 28 (2008) 503–528.

[27] B. Gärtner, J. Matoušek. Approximation algorithms and semidefinite programming. Springer, Heidelberg, 2012. xii+251 pp.

[28] C. Godsil, K. Meagher. Erdős–Ko–Rado theorems: algebraic approaches. Cambridge Stud. Adv. Math., 149 Cambridge University Press, Cambridge, 2016, xvi+335 pp.

[29] W. H. Haemers. Hoffman's ratio bound. *Linear Algebra Appl.*, 617 (2021) 215–219.

[30] W. N. Hsieh. Intersection theorems for systems of finite vector spaces. Discrete Math. 12 (1975) 1–16.

[31] B. Larose, C. Malvenuto. Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs. *European J. Combin.*, 25 (2004) 657–673.

[32] M. Matsumoto and N. Tokushige, The exact bound in the Erdős-Ko-Rado theorem for cross-intersecting families, *J. of Combin. Theory (A)*, 52:90–97, 1989.

[33] L. Pyber. A new generalization of the Erdős-Ko-Rado theorem, *J. Combin. Theory (A)*, 43:85–90, 1986.

[34] P. Renteln. On the spectrum of the derangement graph. *Electron. J. Combin.*, 14 (2007) Research Paper 82, 17 pp.

[35] S. Suda, H. Tanaka, A cross-intersection theorem for vector spaces based on semidefinite programming, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 46 (2014) 342–348.

[36] Suda, S., Tanaka, H., Tokushige, N.: A semidefinite programming approach to a cross-intersection problem with measures. *Math. Program. Ser A*, 166 (2017) 113–130

[37] H. Tanaka. Classification of subsets with minimal width and dual width in Grassmann, bilinear forms and dual polar graphs. *J. Combin. Theory (A)*, 113 (2006) 903–910.

[38] M. J. Todd, Semidefinite optimization, Acta Numer. 10 (2001) 515–560.

[39] N. Tokushige. Intersecting families — uniform versus weighted. *Ryukyu Math. J.*, 18 (2005) 89–103.

[40] N. Tokushige. On cross t-intersecting families of sets. *J. Comb. Theory (A)*, 117 (2010) 1167–1177.

[41] N. Tokushige, The eigenvalue method for cross t-intersecting families, J. Algebraic Combin. 38 (2013) 653–662.

[42] N. Tokushige. Cross t-intrsecting integer sequences from weighted Erdős–Ko–Rado. *Combin. Probab. Comput.*, 22 (2013) 622–637.

[43] N. Tokushige. Application of hypergraph Hoffman's bound to intersecting families. *Algebr. Comb.*, 5 (2022) 537–557.

[44] N. Tokushige. The maximum measure of 3-wise t-intersecting families. *European J. Combin.*, 110 (2023) Paper No. 103703.

[45] R. M. Wilson. The exact bound in the Erdős–Ko–Rado theorem. *Combinatorica*, 4 (1984) 247–257.

[46] 徳重典英. 極値集合論における線形代数手法. 数理解析研究所講究録 1956 （RIMS 共同研究「デザイン、符号、グラフおよびその周辺」）2015 年 7 月 101–110.