例から学ぶ極値組合せ論

徳重 典英

琉球大学教育学部

2010 *Mathematics Subject Classification.* 05D05

集中講義@東北大学
2019/7/9(火)–12(金), 15:00–18:00.

目次

講義 1

Szemerédi の正則化補題

1.1. 正則化とは何か

グラフの性質を調べるには、いわゆる「組合せ論的方法」のほかに有力な手段が二つある。第一はグラフがなんらかの対称性を持つ場合に有効なもので、そのようなグラフは「代数的な方法」で調べることができる。例えば、グラフの構造を反映する行列の固有値を用いてそのグラフの不変量に関する情報を引き出せる。第二はランダムグラフで、これには「確率論的な方法」が使える。例えば、n 頂点のグラフの二頂点間に辺を（独立一様に）確率 p でつければ、そのグラフには $p\binom{n}{2}$ 本の辺があり、$p^3\binom{n}{3}$ 個の三角形があると期待できる。

残念ながら現実のグラフはほとんどの場合、代数的な方法が適用できるほど対称的でもなく、ランダムグラフでもない。しかし、もし

「与えられたグラフをランダムグラフでうまく近似する」

ことができたら、そのグラフの情報を対応するランダムグラフから得られるだろう。これが「正則化の手法」の基本的なアイデアである。

正則化の手法では、正則化補題と数え上げ補題が対となって使われることが多い。正則化補題は与えられたグラフ G を正則化する機械である。この機械は G には変更を加えず、どのように見たら G がランダムグラフのように見えるか、という「見方」を提供する。その「見方」のもとで、数え上げ補題は G に含まれる指定された部分構造の個数を与える。この流れでいくつかの深い結果、例えば等差数列に関す

る Szemerédi の定理を証明できる。ここで $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ とし、

$$r_k(n) = \max\{|A| : A \subset [n] : A \text{ は長さ } k \text{ の等差数列を含まない }\}$$

と定義する。

定理 1.1 ([**1**]). 任意の整数 $k \geq 3$ について $r_k(n) = o(n)$.

ごく大雑把にいうと、この定理を証明するには次の二つを確かめればよい。第一は、$[n]$ の部分集合は、サイズが $o(n)$ であるか、そうでなければ「密なランダム部分集合」で近似できること。第二は、密なランダム集合は、長い等差数列を含むこと。第一が正則化補題に対応し、第二が数え上げ補題に対応する。

この定理からわかるように、$[n]$ の部分集合はあまり疎でなければ、つまりサイズが $o(n)$ でなければ、長い等差数列を含む。Erdős は「疎でない」というのは逆数の和が発散する程度でよいと考える。すなわち彼は次のことを予想した。

予想 1.2. $A \subset \mathbb{N}$ が $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = \infty$ をみたせば、A は任意の長さの等差数列を含む。

素数の逆数の和は発散するから、素数の集合 A は上の予想の重要な例である。実際、この場合には予想は正しいことが Green と Tao によって示された。

定理 1.3 ([**2**]). 素数の集合は任意の長さの等差数列を含む。

1.2. Szemerédi の正則化補題

l 部グラフ G の頂点分割を $V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_l$ とする。$A, B \subset V(G)$ に対してその密度を

$$d(A, B) := \frac{e(A, B)}{|A||B|} \tag{1.1}$$

と定める。ここで $e(A, B)$ は A と B の間にある辺の本数である。さらに V_i と V_j が ϵ **正則**であるとは、任意の $A \subset V_i$ と $B \subset V_j$ について、もし $|A| > \epsilon |V_i|$ かつ $|B| > \epsilon |V_i|$ ならば

$$|d(A, B) - d(V_i, V_j)| < \epsilon \tag{1.2}$$

であることと定義する。このとき A, B が小さすぎなければ、A, B 間の密度は全体の密度とさほどかわらないから、V_i, V_j 間の二部グラフ G_{ij} はランダムグラフのように振る舞うと期待される。(1.2) が

$$|d(A,B) - d| < \epsilon$$

と置き換えられるときは、G_{ij} は (ϵ, d) 正則であるという。

定理 1.4 ([**3**])**.** 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $t_0 \in \mathbb{N}$ に対して、ある $N_0 = N_0(\epsilon, t_0)$ と $T_0 = T_0(\epsilon, t_0)$ が存在して、十分大きな $n > N_0$ とどんな n 頂点グラフ G にも以下の条件をみたす頂点集合の分割 $V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t$ が存在する。

(i) $t_0 \leq t \leq T_0$.

(ii) $|V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_t| \leq |V_1| + 1$.

(iii) $\#\{\{i,j\} \in \binom{[t]}{2} : V_i$ と V_j は ϵ 正則でない $\} \leq \epsilon t^2$.

条件 (i) は分割の個数 t が上下から制限されて n に依らないこと、(ii) は分割のサイズがほぼ一定であること、(iii) は V_i, V_j は ϵ 程度の割合の例外ペアを除いて ϵ 正則であること、を意味する。

この定理は疎な (sparse) グラフ、すなわち辺数が $o(n^2)$ のグラフには意味をもたない。実際、$e(V_i, V_j) = o(n^2)$ なら $d(V_i, V_j) \to 0$ $(n \to \infty)$ だから、どんな分割でも ϵ 正則になってしまう。（定理の言明はそのようなグラフでも正しいが、そこからは、後で紹介するような意味のある結果は得られない。）この点を強調するために、この定理を密な (dense) 正則化補題と呼ぶこともある。

(ii) のもう一つの定式化として、頂点集合を完全に同サイズに分割し、その埋め合わせとしてゴミ箱 V_0 を用意してもよい。つまり $V = V_0 \sqcup V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t$ と分割し、

(ii') $|V_0| < \epsilon n$ かつ $|V_1| = \cdots = |V_t|$

とするのである。

練習問題 1. 上述のように (ii) を (ii') に変更しても、定理 1.4 と同等の結果が得られることを示せ。

ヒント. 後者の分割から前者の分割を得るには、V_0 の頂点を V_1 から V_t になるべく均等に配ればよいが、(iii) を満たすために ϵ を少し大きく取り直す必要がある。

(iii) において ϵ 正則でない例外ペアの存在を許容しているが、これは本質的である。

練習問題 2. 二部グラフ G の頂点分割を $V(G)=\{x_1,\dots,x_n\}\sqcup\{y_1,\dots,y_n\}$ とし、x_i と y_j が隣接するのは $i\le j$ のときであるとする。このグラフの頂点集合のほぼ均等な分割 $V(G)=V_1\sqcup\cdots\sqcup V_t$ には、必ず ϵ 正則ではないペア V_i,V_j が生じることを示せ。

正則化補題における分割の個数の上限 T_0 は、頂点数 n に依存しない定数であるが、これは ϵ の関数としてどこまで小さくできるだろうか。Gowers[**7**] は $T_0<1/\epsilon$ をみたすように正則化することは一般にはできないことを示した。この T_0 と ϵ の関係は、正則化補題をハイパーグラフに拡張するときに考慮すべき重要な論点のひとつである。

1.3. 正則化補題の証明

この節では次の形の正則化補題を証明する[1]。（練習問題 1 も見よ。）

定理. 任意の $\epsilon\in(0,1/4)$ と任意の $t_0\in\mathbb{N}$ に対して、ある $N_0=N_0(\epsilon,t_0)$ と $T_0=T_0(\epsilon,t_0)$ が存在して、十分大きな $n>N_0$ とどんな n 頂点グラフ G にも以下の条件をみたす頂点集合の分割

$$V(G)=V_0\sqcup V_1\sqcup\cdots\sqcup V_t \tag{1.3}$$

が存在する。

(i) $t_0\le t\le T_0$.
(ii') $|V_0|<\epsilon n$ かつ $|V_1|=\cdots=|V_t|$.
(iii) $\#\{\{i,j\}\in\binom{[t]}{2}: V_i$ と V_j は ϵ 正則でない $\}\le\epsilon t^2$.

証明においては、分割の index という不変量が重要な役割を果たす。まずこれを定義しよう。頂点集合の分割 (1.3) に対応して

$$\mathcal{P}:=\{V_0,V_1,\dots,V_t\}$$

とおき、その index を

$$\mathrm{ind}(\mathcal{P}):=\sum_{\{V_i,V_j\}\in\binom{\mathcal{P}}{2}}\frac{|V_i||V_j|}{n^2}\,d(V_i,V_j)^2$$

[1] ここで紹介する証明は Choongbum Lee の web (`math.mit.edu/~cb_lee/18.318/materials.html`) にあるものを参考にした。

と定める。これは V_i, V_j 間の G の密度の二乗平均に相当する[2]。この後すぐに確かめるが、index には次の特徴がある。

- $\mathrm{ind}(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}$.
- 分割 $\mathcal{P}$ を細分すると、index は増える。

ここで分割 $\mathcal{P}$ を細分するとは、V_i たちの中を分割することをいう。適当な分割から出発して細分を繰り返すと、index は増えていくが、$\frac{1}{2}$ は超えない。さらに、次のことが成り立つ。

- 分割が (iii) を満たさないならば、その分割を細分して index を一定値（例えば $\epsilon^5/2$）増やすことができる。

したがって、分割の細分を有限回繰り返して (iii) を満たすようにできる。その際 (i) と (ii') も成り立っていれば証明は完了する。では、この方針に従って実際に証明しよう。

主張 1.5. $\mathrm{ind}(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}$.

証明. $x_i = |V_i|$, $e_{ij} = e(V_i, V_j)$ とおく。密度の定義より

$$d(V_i, V_j) = \frac{e_{ij}}{x_i x_j} \le 1$$

であることと、$\sum e_{ij} = |E(G)| < \frac{n^2}{2}$ を用いて

$$\mathrm{ind}(\mathcal{P}) = \sum \frac{x_i x_j}{n^2}\left(\frac{e_{ij}}{x_i x_j}\right)^2 = \frac{1}{n^2}\sum \frac{e_{ij}^2}{x_i x_j} \le \frac{1}{n^2}\sum e_{ij} < \frac{1}{2}$$

を得る。ただし和は $0 \le i < j \le t$ なるすべての i, j でとる。 □

$V_i \in \mathcal{P}$ を $V_i = X_1 \sqcup X_2$ と分割して得られる $\mathcal{P}$ の細分を $\mathcal{Q}$ とする。すなわち、

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= (\mathcal{P} \setminus \{V_i\}) \cup \{X_1, X_2\} \\ &= \{V_0, \ldots, V_{i-1}, X_1, X_2, V_{i+1}, \ldots, V_t\}.\end{aligned}$$

主張 1.6. $\mathrm{ind}(\mathcal{Q}) \ge \mathrm{ind}(\mathcal{P})$.

---

[2]単純に $\mathrm{ind}(\mathcal{P}) = \sum d(V_i, V_j)^2 / \binom{|\mathcal{P}|}{2}$ と定義してもよい。全く同じ方針で定理を証明できるが、計算は少しだけ面倒になる。

証明. $j \neq i$ を固定し、$X := V_i$, $Y := V_j$ とおく。このとき

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{|X_i||Y|}{n^2} d(X_i, Y)^2 \geq \frac{|X||Y|}{n^2} d(X, Y)^2 \tag{1.4}$$

を示せばよい。$x_i := |X_i|$, $e_i := e(X_i, Y)$ とおくと、

$$d(X, Y) = \frac{e(X, Y)}{|X||Y|} = \frac{e_1 + e_2}{(x_1 + x_2)y}$$

と表せる。これらを用いて証明すべき不等式を整理すると

$$\frac{e_1^2}{x_1} + \frac{e_2^2}{x_2} \geq \frac{(e_1 + e_2)^2}{x_1 + x_2} \tag{1.5}$$

となる。これは Cauchy–Schwarz の不等式から従う。 □

練習問題 3. Cauchy–Schwarz の不等式 $\sum a_i^2 \sum b_i^2 \geq (\sum a_i b_i)^2$ に、$a_i = e_i/\sqrt{x_i}$, $b_i = \sqrt{x_i}$ を代入して (1.5) を確かめよ。

練習問題 4. 正数 p_1, p_2 が $p_1 + p_2 = 1$ をみたし、f が凸関数であるとき、$p_1 f(z_1) + p_2 f(z_2) \geq f(p_1 z_1 + p_2 z_2)$ が成り立つ（Jensen の不等式)。これを $f(z) = z^2$, $p_i = \frac{|X_i||Y|}{|X||Y|}$, $z_i = d(X_i, Y)$ に適用して (1.4) を導け。

この主張を繰り返し適用することで、分割の細分によって index は減少しないことがわかる。次に、V_i, V_j 間で G が ϵ 正則でなければ、この部分を細分すると index は減らないだけでなく、実際に一定値だけ増加することを示そう。その根拠は次の事実にある。

主張 1.7. 分割 $X := V_i = X_1 \sqcup X_2$ と $Y := V_j = Y_1 \sqcup Y_2$ が $|X_1| > \epsilon|X|$, $|Y_1| > \epsilon|Y|$, $|d(X_1, Y_1) - d(X, Y)| > \epsilon$ を満たすならば

$$\sum_{a=1}^{2} \sum_{b=1}^{2} \frac{|X_a||Y_b|}{|X||Y|} d(X_a, Y_b)^2 \geq d(X, Y)^2 + \epsilon^4.$$

証明. まず $e(X, Y) = e(X_1 \sqcup X_2, Y_1 \sqcup Y_2) = \sum_{a,b} e(X_a, Y_b)$ から

$$\sum_{a,b} \frac{|X_a||Y_b|}{|X||Y|} d(X_a, Y_b) = \sum_{a,b} \frac{e(X_a, Y_b)}{|X||Y|} = d(X, Y)$$

に注意する。（和は 4 通り全ての a, b についてとる。）ここで

$$x_a = |X_a|, y_a = |Y_a|, x = |X|, y = |Y|, d_{ab} = d(X_a, Y_b), d = d(X, Y)$$

とおくと、

$$\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}d_{ab}=\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}\frac{e(X_a,Y_b)}{x_a y_b}=\frac{e(X,Y)}{xy}=d$$

に注意して

$$\begin{aligned}&\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}(d_{ab}-d)^2\\&=\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}d_{ab}^2-2d\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}d_{ab}+d^2\\&=\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}d_{ab}^2-d^2\end{aligned}$$

を得る。一方、X_1, Y_1 に関する仮定から

$$\sum_{a,b}\frac{x_a y_b}{xy}(d_{ab}-d)^2\geq\frac{x_1 y_1}{xy}(d_{11}-d)^2>\frac{\epsilon x\,\epsilon y}{xy}\epsilon^2=\epsilon^4$$

である。これらから目標の不等式を得る。 □

グラフ G の分割 $\mathcal{P}=\{V_0,\ldots,V_t\}$ が定理の条件 (ii') を満たすが、(iii) は満たしていないとしよう[3]。このとき V_i, V_j 間が ϵ 正則とならないようなペア $\{i,j\}\in\binom{[t]}{2}$ が少なくとも ϵt^2 個ある。これらのすべてのペアについて、非正則性を特定する witness[4]をそれぞれ固定し、主張 1.7 を適用して $\mathcal{P}$ を細分する。例えば、V_i と ϵ 非正則となるペアが k 個あり、それらによって V_i が s_i 個に細分されて $V_i=V_{i,1}\sqcup\cdots\sqcup V_{i,s_i}$ となったとしよう。このとき $k<t$ であり、$s_i\leq 2^k<2^t$ である。このようにして得られる $\mathcal{P}$ の細分を $\mathcal{Q}$ とすると、これは $V(G)$ を高々 $1+s_1+\cdots+s_t<t2^t$ 個に分割する。(この操作を Venning という。)

主張 1.8. $\mathrm{ind}(\mathcal{Q})>\mathrm{ind}(\mathcal{P})+\epsilon^5/2$.

証明. 分割 $\mathcal{Q}$ における $V_i\in\mathcal{P}$ の細分を

$$V_i=V_{i,1}\sqcup\cdots\sqcup V_{i,s_i}$$

とする。index の定義から

$$\mathrm{ind}(\mathcal{Q})=\sum_{i,j}\sum_{p,q}\frac{|V_{i,p}||V_{j,q}|}{n^2}\,d(V_{i,p},V_{j,q})^2$$

[3]ここでは条件 (i) については考慮しない。
[4]主張 1.7 における X_1, Y_1 のこと。

である。和はすべての $0 \le i < j \le t$, $p \in [s_i]$, $q \in [s_j]$ についてとる。また (1.4) を繰り返し適用すると

$$\sum_{p\in[s_i],q\in[s_j]} \frac{|V_{i,p}||V_{j,q}|}{n^2} d(V_{i,p},V_{j,q})^2 \ge \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i,V_j)^2 \tag{1.6}$$

である。両辺の i,j についての総和から $\mathrm{ind}(\mathcal{Q}) \ge \mathrm{ind}(\mathcal{P})$ が従う。

この評価を改善するため、ϵ 正則ではないペアに着目し、主張 1.7 を利用したい。そこでグラフ G は V_i, V_j 間で ϵ 正則でないとする。このとき witness による分割 $V_i = X_1 \sqcup X_2$, $V_j = Y_1 \sqcup Y_2$ が存在し、主張 1.7 が成り立つ。すなわち

$$\sum_{a,b} \frac{|X_a||X_b|}{n^2} d(X_a,Y_b)^2 \ge \frac{|V_i||V_j|}{n^2}\left(d(V_i,V_j)^2+\epsilon^4\right).$$

また X_a, Y_b たちは $\mathcal{Q}$ によって細分されるから、その対応を $[s_i] = I_1 \sqcup I_2$, $[s_j] = J_1 \sqcup J_2$ としよう。例えば $X_1 = \bigsqcup_{p\in I_1} V_{i,p}$ である。ここで (1.4) を上の不等式の左辺に適用すると

$$\sum_{a,b}\sum_{p\in I_a,q\in J_b} \frac{|V_{i,p}||V_{j,q}|}{n^2} d(V_{i,p},V_{j,q})^2 \ge \frac{|V_i||V_j|}{n^2}\left(d(V_i,V_j)^2+\epsilon^4\right) \tag{1.7}$$

を得る。これが改善された評価である。

最後に ϵ 正則な V_i, V_j については (1.6) を、非正則なペアについては (1.7) を用いて、すべての i,j について総和をとると、

$$\mathrm{ind}(\mathcal{Q}) \ge \mathrm{ind}(\mathcal{P}) + \sum \frac{|V_i||V_j|}{n^2}\epsilon^4$$

となる。ここで右辺の和は ϵ 正則でない i,j についてとる。定理の条件 (iii) を満たさないという仮定から、そのようなペアは少なくとも ϵt^2 個ある。また条件 (ii') の仮定から、$|V_i| = (n-|V_0|)/t > (1-\epsilon)n/t$ である。したがって

$$\sum \frac{|V_i||V_j|}{n^2}\epsilon^4 > (\epsilon t^2)\frac{((1-\epsilon)n/t)^2}{n^2}\epsilon^4 = (1-\epsilon)^2\epsilon^5 > \frac{\epsilon^5}{2}$$

であり、目標の不等式が得られた。 □

以上の準備の元に定理を示そう。ϵ と t_0 が与えられたとする。はじめに定数を定義するが、これらは後の議論がうまくいくように十分大きくとる。どうしてそう定めるかは証明を読み進みながら確かめれば

よい。まず、$l := \max\{t_0, 2\epsilon^{-6}\}$ とおく。次に関数 $f(l) = l4^l$ を再帰的に $\lceil \epsilon^{-5} \rceil$ 回繰り返して

$$T_0 := (f \circ f \circ \cdots \circ f)(l)$$

と定める。最後に $N_0 = N_0(\epsilon, t_0) := 2T_0\epsilon^{-6}$ とおく。ここで $n > N_0$ とし、与えられた n 頂点グラフ G を正則化しよう。

第一段階は、$V(G)$ の分割 $\mathcal{P} = \{V_0^{(\mathcal{P})}, \ldots, V_l^{(\mathcal{P})}\}$ をゴミ箱 V_0 を除いて $|V_i| = \lfloor n/l \rfloor$ となるように（任意に）とる。このとき $|V_0| < n/l \leq \frac{\epsilon^6 n}{2}$ である。これは $t = l$ として定理の条件 (i),(ii') をみたすから、もし (iii) もみたせばこれが求める分割である。そこで (iii) を満たさないと仮定しよう。

第二段階は、主張 1.8 を用いて $\mathcal{P}$ を細分し、分割

$$\mathcal{Q} = \{V_0^{(\mathcal{Q})}, \ldots, V_s^{(\mathcal{Q})}\}$$

をつくる。このとき $s \leq l2^l$ で

$$\mathrm{ind}(\mathcal{Q}) > \mathrm{ind}(\mathcal{P}) + \epsilon^5/2$$

が成り立つ。条件 (ii') を満たすように $\mathcal{Q}$ をさらに細分して

$$\mathcal{Q}' = \{V_0^{(\mathcal{Q})}, V_{0,1}^{(\mathcal{Q}')} \ldots, V_{0,s}^{(\mathcal{Q}')}, V_1^{\mathcal{Q}'}, \ldots, V_u^{(\mathcal{Q}')}\}$$

をつくろう。このため $\mathcal{Q}$ のゴミ箱以外の各 $V_i^{(\mathcal{Q})}$ をサイズが

$$m := \lfloor \frac{\epsilon^6 n}{2s} \rfloor$$

の部分集合に等分し、余った点たちを小さなゴミ箱 $V_{0,i}^{(\mathcal{Q})}$ に入れる。この操作により、$\mathcal{Q}'$ においてはゴミ箱以外はサイズが揃って

$$|V_1^{(\mathcal{Q}')}| = \cdots = |V_u^{(\mathcal{Q}')}| = m$$

となる。ゴミ箱たちに入っている頂点の総数は

$$|V_0^{(\mathcal{Q})}| + \sum_{i=1}^{s} |V_{0,i}^{(\mathcal{Q}')}| \leq |V_0^{(\mathcal{Q})}| + ms < \frac{\epsilon^6 n}{2} + \frac{\epsilon^6 n}{2}$$

を満たす。$\mathcal{Q}'$ のゴミ箱たちを除いた分割の個数 u を評価しよう。明らかに $u \leq n/m$ であり、右辺はだいたい $2s/\epsilon^6$ であるが、ここは気前よく次のように評価しよう。

$$u < 4s/\epsilon^6 \leq 2ls \leq 2l^2 2^l \leq l4^l.$$

さらに $\mathcal{Q}'$ は $\mathcal{Q}$ の細分だから $\mathrm{ind}(\mathcal{Q}') \geq \mathrm{ind}(\mathcal{Q})$ である。

さて分割 $\mathcal{P}$ に主張 1.8 を適用し、さらに等分割による細分を施して分割 $\mathcal{Q}'$ を得たが、この操作で状況は次のように変化した。

- $\mathrm{ind}(\mathcal{Q}')$ は $\mathrm{ind}(\mathcal{P})$ より少なくとも $\epsilon^5/2$ 増えた。
- $\mathcal{Q}'$ と $\mathcal{P}$ の分割の個数 u, l は $u < f(l)$ をみたす。
- ゴミ箱たちに入っている頂点の総数は高々 $\epsilon^6 n/2$ 増えた。

もし $\mathcal{Q}'$ がまだ条件 (iii) を満たさなければ、$\mathcal{P} := \mathcal{Q}'$ と取り直して、同じ変換作業を続ける。ただし非正則ペアはサイズの揃っている分割集合のみを対象とし、ゴミ箱たちは Venning から除くものとする。この変換を繰り返すごとに index は $\epsilon^5/2$ 増えていくが、一方で index は 1/2 を超えないから、この変換が $\lceil \epsilon^{-5} \rceil$ 回以上続くことはない。したがって途中で必ず (iii) が満たされる。ここでゴミ箱たちを一つのゴミ箱にまとめる。最終的に得られた分割を $\mathcal{R}$ とすると、ゴミ箱のサイズは高々 $\epsilon^6 n/2 \times \lceil \epsilon^{-5} \rceil < \epsilon n$ なので、(ii') も満たされる。また T_0 の定義から、$\mathcal{R}$ の分割の個数は T_0 を超えないため (i) も満たされる。つまり $\mathcal{R}$ は定理のすべての条件を満たす分割であり、これで証明が完了した。 □

正則化補題においては、正則化の精度をはかる ϵ と分割の個数を見積もる T_0 が重要なパラメタである。T_0 は ϵ の関数であるが、ここで述べた証明から T_0 の上界は高さが ϵ^{-5} の tower 関数で与えられる。実はこの増大度は本質的には改善できないことが知られている。Gowers は正則化補題をみたすように分割するには、その個数が少なくとも高さ $\epsilon^{-1/16}$ の tower 関数になるようなグラフを構成した [**7**]。その後の進展については Moshkovitz–Shapira[**4**] を見よ。

講義 2

グラフの正則化補題の応用

2.1. 正則化補題の応用

正則化補題の典型的で単純な応用例を紹介しよう。グラフ G に対して、そのサイズ $|G|$ は辺の本数を表すとする。つまり $|G| := |E(G)|$ である。

定理 2.1. n 頂点グラフ G のどの辺もちょうど一つの三角形に含まれるならば、$|G| = o(n^2)$ である。

この定理をもう少し正確に述べると、どの辺もちょうど一つの三角形に含まれているような n 頂点グラフ G_n の列が与えられたとき、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|G_n|}{n^2} = 0$$

が成り立つ、となる。つまり、ある n 頂点グラフについての言明ではなくて、頂点数が無限大に近づくようなグラフの列についての言明である。そのような状況を想定しているという了解のもとに、簡単のため、上記のような定理の述べ方をする。

証明. G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるのに $|G| \ge cn^2$ であったとしよう。ここで定数 d, ϵ, t_0 を

$$c \gg d \ge \epsilon \gg \tfrac{1}{t_0}$$

となるように選ぶ。d はいわゆる sparseness threshold である。G を正則化し、分割

$$V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t \quad (t_0 \le t \le T_0)$$

を得る。ここから以下に該当する辺を全部除去する。

(i) 非正則なペア V_i, V_j 間の辺。これは高々 $\epsilon t^2(\frac{n}{t})^2 = \epsilon n^2$ 本。

(ii) 密度が d 未満の疎なペア V_i, V_j 間の辺。これは高々 $\binom{t}{2}d(\frac{n}{t})^2 < \frac{dn^2}{2}$ 本。

(iii) 各 V_i の内部の辺。これは高々 $t\binom{n/t}{2} < \frac{n^2}{2t}$ 本。

除去した辺は全部で高々 $(\epsilon + \frac{d}{2} + \frac{1}{2t})n^2 < dn^2$ である。

もともと $cn^2/3$ 個以上の三角形があり、辺の除去でせいぜい dn^2 個の三角形が壊れた。$c \gg d$ だったからまだ三角形が残っている。例えば V_1, V_2, V_3 間に三角形があるとしよう。このとき次の数え上げ補題により実はここに $\Omega(n^3)$ 個の三角形がある。しかし G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるから G 内の三角形の個数は高々 $\binom{n}{2}/3 = O(n^2)$ のはずで、矛盾が生じた。 □

三部グラフ G の部集合を $V(G) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$, $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$ とし、V_i, V_j で誘導される二部グラフを G_{ij} とかく。次の事実は正則性の定義から直ちに従う。

補題 2.2 (数え上げ補題)**.** 任意の $\gamma > 0$ と $d > 0$ に対して、ϵ を $0 < 2\epsilon < \min\{\gamma, d\}$ をみたすようにとる。各 G_{ij} が (ϵ, d_{ij}) 正則で $d_{ij} \geq d$ ならば、G には少なくとも $(1-\gamma)(d-\epsilon)^3 n^3$ 個の三角形がある。

証明. まず G_{12} の典型的な点 x の次数は

$$\deg(x) \geq (d_{12} - \epsilon)n$$

を満たすことを見よう。このために次数の低い点たちを

$$V_1^- = \{x \in V_1 : \deg(x) < (d_{12} - \epsilon)n\}$$

とおくと、

$$d(V_1^-, V_2) = \frac{e(V_1^-, V_2)}{|V_1^-||V_2|} < d_{12} - \epsilon$$

であるが、G_{12} は (ϵ, d_{12}) 正則だから $|V_1^-| < \epsilon n$ が従う。したがって V_1 の点は高々 ϵ 個を除いて次数は $(d_{12} - \epsilon)n$ 以上である。G_{13} についても同様に処理すると、V_1 の典型的な点 x は、その近傍

$$N_i = N_i(x) := \{y \in V_i : xy \in E(G)\} \quad (i = 2, 3)$$

について

$$|N_i| \geq (d_{1i} - \epsilon)n \geq (d - \epsilon)n > \epsilon n$$

を満たす。さらに G_{23} は (ϵ, d_{23}) 正則だから

$$d(N_2, N_3) = \frac{e(N_2, N_3)}{|N_2||N_3|} \geq d_{23} - \epsilon$$

より

$$\begin{aligned} e(N_2, N_3) &= (d_{23} - \epsilon)|N_2||N_3| \\ &\geq (d_{12} - \epsilon)(d_{13} - \epsilon)(d_{23} - \epsilon)n^2 \\ &\geq (d - \epsilon)^3 n^2 \end{aligned}$$

が従う。これは x を含む三角形の個数の下界を与える。典型的な $x \in V_1$ の個数は少なくとも $(1 - 2\epsilon)n$ であるから、G 内の三角形の総数は

$$> (1 - 2\epsilon)(d - \epsilon)^3 n^3 > (1 - \gamma)(d - \epsilon)^3 n^3$$

を満たす。 □

練習問題 5. 補題 2.2 の条件 $0 < 2\epsilon < \min\{\gamma, d\}$ を「固定された γ, d に対して十分小さい ϵ をとる」と変更すれば、結論の $(1 - \gamma)(d - \epsilon)^3 n^3$ を $(1 - \gamma)d^3 n^3$ に改善できることを示せ。

練習問題 6. 任意の $\gamma > 0$ と $d > 0$ に対して、ϵ を十分小さくとり各 G_{ij} が (ϵ, d) 正則ならば、G の含む三角形の個数は $(1 \pm \gamma)d^3 n^3$ の範囲にあることを示せ。

ヒント. 典型的な頂点として次数が $(d \pm \epsilon)n$ の範囲にあるものを考えよ。 □

定理 2.1 の証明は正則化を利用する手法の典型例で次の手順に従っている。

(i) 定数をうまく選ぶ。

(ii) 正則化補題を用いて正則化する。

(iii) 邪魔な辺を除去する。即ち、非正則なペア間の辺、疎なペア間の辺、V_i 内部の辺を捨てる。

(iv) 除去した辺が無視できるほど少ないことを言う。

(v) 数え上げ補題を用いてクリークを数える。

定理 2.1 を用いて、長さ 3 の等差数列に関する Roth の定理を証明しよう。この証明は Ruzsa と Szemerédi による [**6**]。

定理 2.3 ([**5**])**.** $r_3(n) = o(n)$.

証明. $A \subset [n]$ は長さ 3 の等差数列を含まないとする。$V(G) = [6n]$ とし、任意の $i \in [n]$ と $a \in A$ に三角形 $T(i, a) = \{i, i+a+n, i+2a+3n\}$ を対応させる。つまりグラフ G を $G = \bigcup\{\binom{T(i,a)}{2} : i \in [n], a \in A\}$ で定義する。もし G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるならば、G の辺数は $3n|A|$ であり、一方これは定理 2.1 から $o(n^2)$ なので $|A| = o(n)$ が従う。

さて三つの三角形 $T(i, a), T(i', a'), T(i'', a'')$ から一辺ずつ取り出してできる三角形が G 内にあるとしよう。例えばその 3 辺が

$$\{i, i+a+n\},\ \{i'+a'+n, i'+2a'+3n\},\ \{i'', i''+2a''+3n\}$$

であるとする。このとき

$$i = i'',\ i+a+n = i'+a'+n,\ i'+2a'+3n = i''+2a''+3n$$

で、ここから $a + a' = 2a''$ つまり A 内に長さ 3 の等差数列がある。これは矛盾である。 □

補題 2.2（数え上げ補題）ではグラフ G に含まれる三角形の個数を数えた。一般に l 頂点グラフ H と l 部グラフ G 与えられたとき、もし G から得られる $\binom{l}{2}$ 個の二部グラフ G_{ij} がすべて (ϵ, d) 正則ならば、G に含まれる H の個数を数えることができる。ここで G の l 頂点部分グラフ G' が H と partite isomorphic であるとは、$V(H) = \{x_1, \ldots, x_l\}$, $V(G') = \{v_1, \ldots, v_l\}$ としたとき、各 i について $v_i \in V_i$ であり、各 i, j について $x_i x_j \in E(H)$ と $v_i v_j \in V(G')$ が同値になることと定める。

練習問題 7. 任意の $\gamma, d > 0$ に対してある $\epsilon > 0$ が存在して次を満たすことを示せ。4 頂点グラフ H が $V(H) = \{x_1, \ldots, x_4\}$ のラベル付けをもち、4 部グラフ G の頂点集合が $V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_4$, $|V_1| = \cdots = |V_4| = n$ と分割され、どの V_i, V_j 間も (ϵ, d) 正則ならば、H と partite isomorphic な G の部分グラフの個数は、

$$(1-\gamma) d^{|E(H)|} n^4$$

以上である。

2.2. グラフの除去補題

定理 2.1 は、除去補題 (removal lemma) あるいは埋め込み補題 (embedding lemma) とよばれるものの一例である。定理 2.1 の証明において本質的なことは、n 頂点グラフ G の三角形をすべて破壊するのに $\Omega(n^2)$ 本以上の辺を除去する必要があるならば、G には $\Omega(n^3)$ 個以上の三角

形がある、という事実であった。言い換えると、高々$o(n^3)$ 個の三角形を含むグラフは高々$o(n^2)$ 本の辺の除去で K_3-free（三角形のないグラフ）にできる。次に紹介する三角形の除去補題は、この事実をもう少し精密に定量化している。

定理 2.4. 任意の $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ に対して、ある $\delta > 0$ と $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の $n > N_0$ なる n 頂点グラフ G は次を満たす。G が高々δn^3 個の三角形を含むならば、G から高々ϵn^2 本の辺を除去して三角形がないようにできる。

次の証明では、複数の ϵ を区別するため、補題 2.2 の ϵ を $\epsilon_{2.2}$, 定理 1.4 の ϵ を $\epsilon_{1.4}$ と表記する。

証明. $\epsilon > 0$ が与えられたとする。ここで

$$\gamma := \frac{1}{2}, \quad d := \epsilon, \quad \epsilon_{2.2} := \frac{\epsilon}{3}$$

とおく。このとき $2\epsilon_{2.2} < \min\{\gamma, d\}$ が満たされるので補題 2.2 が適用できる（これは証明の最後で必要になる）。

次に定理 1.4 を

$$\epsilon_{1.4} := \frac{\epsilon}{3}, \quad t_0 := \frac{3}{\epsilon}$$

として適用し、T_0, N_0 を得る。$n > N_0$ とし、任意の n 頂点グラフ G が与えられたとする。定理 1.4 で G を正則化すると、$\epsilon_{1.4}$ 正則な分割

$$V(G) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_t$$

を得る。ただし $t_0 \le t \le T_0$ である。頂点分割のペアたちは、高々$\epsilon_{1.4} n^2$ 個を除いて、$\epsilon_{1.4}$ 正則である。簡単のため $|V_i| = n/t$ としよう。こうしても以下の議論に本質的な問題はない。

対偶を示すため、G から ϵn^2 本の辺を除去しても三角形はなくならないと仮定する。定石にしたがって、邪魔な辺を除去する。すなわち、

(i) 非正則なペア V_i, V_j 間の辺。これは高々$\epsilon_{1.4} t^2 (\frac{n}{t})^2 = \frac{\epsilon}{3} n^2$ 本。

(ii) 密度が d 未満の疎なペア V_i, V_j 間の辺。これは高々$\binom{t}{2} d (\frac{n}{t})^2 < \frac{dn^2}{2} = \frac{\epsilon}{2} n^2$ 本。

(iii) 各 V_i の内部の辺。これは高々$t\binom{n/t}{2} < \frac{n^2}{2t_0} < \frac{\epsilon}{6} n^2$ 本。

除去した辺は全部で高々$(\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{6}) n^2 = \epsilon n^2$ だから、G には三角形が残っている。それが V_1, V_2, V_3 間にあるとしてよい。V_i, V_j が誘導する

二部グラフを G_{ij} とし、補題 2.2 を適用すると、G には少なくとも

$$(1-\gamma)(d-\epsilon_{2.2})^3(n/t)^3 > (1/2)(2\epsilon/3)^3(n/T_0)^3$$

個の三角形がある。T_0 は ϵ から定まる定数であったことを思い出そう。そこで $\delta := \frac{1}{2}(\frac{2\epsilon}{3T_0})^3$ と定めておけばよい。 □

練習問題 8. n 頂点グラフが高々$o(n^3)$ 個の三角形を含むならば、G から高々$o(n^2)$ 本の辺を除去して三角形がないようにできることを示せ。

練習問題 9. 除去補題から定理 2.1 が従うことを確かめよ。

練習問題 10. 任意の l 頂点グラフ H と任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ と $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、任意の $n > N_0$ なる n 頂点グラフ G は次を満たすことを示せ。G が高々δn^l 個の H のコピーを含むならば、G から高々ϵn^2 本の辺を除去して H-free にできる。

頂点集合が $V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_l$ と分割された完全 l 部グラフで、$|V_1| = \cdots = |V_l| = s$ をみたすもの（と同型なグラフ）を $K_l(s)$ と表記する。これは sl 個の頂点、$\binom{l}{2}s^2$ 本の辺をもつ。$K_l := K_l(1)$ は通常の l 頂点完全グラフ、$K_2(s)$ は部集合 (partite set, V_i のこと) がそれぞれ s 点の完全二部グラフである。

練習問題 11 (supersaturation)**.** 任意の $c > 0$ と $s \in \mathbb{N}$ に対して、n_1 と c' が存在し、次が成り立つことを示せ。n 頂点グラフ G が $n > n_1$ と $|E(G)| > cn^2$ を満たせば、G は少なくとも $c'n^{2s}$ 個の完全二部グラフ $K_2(s)$ のコピーを含む。

練習問題 12. 任意の $\epsilon > 0$ と整数 $l \geq 3, s \geq 1$ に対して、ある n_0 が存在し、次が成り立つことを示せ。n 頂点グラフ G が $n > n_0$ で $K_l(s)$-free ならば、ここから ϵn^2 辺を除去して K_l-free にできる。

講義 3

ハイパーグラフ除去補題とその応用

前講ではグラフの正則化補題と数え上げ補題を使って、三角形の除去補題（あるいはその系である定理 2.1）を証明し、そこから長さ 3 の等差数列に関する定理 2.3 が従うことをみた。この流れはハイパーグラフに拡張できる。すなわち k グラフ (k-uniform hypergraph) の正則化補題と数え上げ補題から、$(k+1)$ 頂点クリークの除去補題を証明し、そこから長さ k の等差数列に関する Szemerédi の定理 1.1、さらにその高次元版とみなせる Furstenberg–Katznelson の定理が得られる。ここでは k グラフの除去補題とその応用について紹介する。

ハイパーグラフの正則化手法（正則化補題、数え上げ補題、除去補題）の出発点は Frankl と Rödl の [**8**] で、そこでは 3 グラフが扱われた。一般の k グラフの結果は、Gowers[**7, 9**] と Rödl のグループ [**10, 11**] によって 2003 年に独立に得られた。その後も現在までこの手法の拡張や一般化が研究されている。この講義での扱いは Schacht と Rödl の [**12, 13**] に従う。

3.1. ハイパーグラフの除去補題

整数 $t > k \geq 2$ に対して、$K_t^{(k)}$ で t 頂点の完全 k グラフ[1]をあらわす。形式的には $K_t^{(k)} = \{F \subset [t] : |F| = k\}$ である。これは t 頂点、$\binom{t}{k}$ 辺

[1] t-vertex k-uniform complete graph

からなる k グラフである。$t=3, k=2$ のときは、グラフにおける三角形である。次の定理はハイパーグラフの正則化補題と数え上げ補題から得られる。

定理 3.1 (k グラフの除去補題)**.** 整数 $t > k \geq 2$ を固定する。n 頂点 k グラフ $\mathcal{G}$ が高々$o(n^t)$ 個の $K_t^{(k)}$ のコピーを含むならば、$\mathcal{G}$ から $o(n^k)$ 本の辺を除去して $K_t^{(k)}$-*free* にできる。

上の定理から次の系（定理 2.1 は $k=2$ の場合に相当）が得られる。

系 3.2. n 頂点 k グラフ $\mathcal{H}$ のどの辺もちょうど一つの $K_{k+1}^{(k)}$ に含まれるならば、$|\mathcal{H}| = o(n^k)$ である。

証明. $\mathcal{H}$ が含む $K_{k+1}^{(k)}$ のコピーの個数 N を数えよう。$K_{k+1}^{(k)}$ は $k+1$ 辺からなり、$\mathcal{H}$ の各辺はちょうど一つの $K_{k+1}^{(k)}$ に所属するから、

$$N = \frac{|\mathcal{H}|}{k+1} \leq \binom{n}{k}/(k+1) = o(n^{k+1})$$

である。定理 3.1 を $t = k+1$ で適用しよう。$\mathcal{H}$ を $K_{k+1}^{(k)}$-free にするために除去すべき辺の本数の最小値 M は $M = o(n^k)$ を満たす。

一方、$\mathcal{H}$ の辺を 1 本除去するごとに壊れる $K_{k+1}^{(k)}$ の個数は高々1 個だから、$\mathcal{H}$ を $K_{k+1}^{(k)}$-free にするためには、少なくとも N 本の辺の除去が必要である。つまり $N = |\mathcal{H}|/(k+1) \leq M$.

以上より $|\mathcal{H}|/(k+1) \leq M = o(n^k)$ すなわち $|\mathcal{H}| = o(n^k)$ を得る。 $\square$

3.2. 高次元等差数列と Furstenberg–Katznelson の定理

$\mathbb{R}^d$ の有限部分集合 T に対して、これを拡大、平行移動して得られる集合を T の homothetic copy という。記号で書けば、ある $y \in \mathbb{R}^d$ と $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を用いて

$$y + \lambda T = \{y + \lambda t : t \in T\}$$

と表される集合である。$d=1$ で $T = \{1, 2, \ldots, k\}$ のとき、T の homothetic copy とは長さ k の等差数列である。Furstenberg は定理 1.1 の別証明 [**14**] を与え、その手法を発展させて Furstenberg と Katznelson は次の定理を得た。

定理3.3 ([**15**]). $\mathbb{R}^d$ の有限部分集合 T と $\delta > 0$ を固定する。このとき $\mathbb{R}^d$ の有限部分集合 C が存在して、C の任意の部分集合 Y が $|Y| > \delta|C|$ を満たせば、Y は T の *homothetic copy* を含む。特に $T = [-t, t]^d$ $(t \in \mathbb{N})$ ならば、ある $N = N(t, d, \delta)$ が存在して $C = [-N, N]^d$ ととれる。ただし $[-t, t] := \{i \in \mathbb{Z} : -t \leq i \leq t\}$ とする。

Furstenberg と Katznelson の証明はエルゴード理論に基づく。一方、この定理を除去補題から導くこともできる。その利点は、$N(t, d, \delta)$ の上界を量的に評価できることで、これはオリジナルの証明からは得られない。

定理 3.3 の証明. ここでは $T = [-1, 1]^2$ の場合 $(t = 1, d = 2)$ について証明する。$\delta > 0$ が与えられたとする。背理法で証明するため、どんな N に対してもある $Y \subset [-N, N]^2$ が存在して、$|Y| > \delta(2N + 1)^2$ であるにもかかわらず Y は T の homethetic copy（以下 h コピーと略記）を含まないと仮定する。証明の方針は次の通り。$|T| = 9$ であるが、これに対応する 9 点の simplex $S \subset \mathbb{R}^8$ をうまく定めると、Y が T の h コピーを含まないことから $W := Y \times [-N, N]^6$ は S の h コピーを含まない。しかしこれは除去補題に矛盾することを示す。このアイデアは Solymosi[**16**] による。

まず $S = \{s_0, \ldots, s_8\} \subset \mathbb{R}^8$ を定義しよう。便宜上、s_0 を原点にとり、先頭の二つの座標に T の 9 頂点を配置し、残りの 6 個の座標は $s_1, \ldots, s_8$ が線形独立になるように 0 または ± 1 から選ぶ。例えば、次のようにする。

$$
\begin{aligned}
s_0 &= (& 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0), \\
s_1 &= (& 1, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0), \\
s_2 &= (& 1, && 1, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0), \\
s_3 &= (& 0, && 1, && 1, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0), \\
s_4 &= (& -1, && 1, && 0, && 1, && 0, && 0, && 0, && 0), \\
s_5 &= (& -1, && 0, && 0, && 0, && 1, && 0, && 0, && 0), \\
s_6 &= (& -1, && -1, && 0, && 0, && 0, && 1, && 0, && 0), \\
s_7 &= (& 0, && -1, && 0, && 0, && 0, && 0, && 1, && 0), \\
s_8 &= (& 1, && -1, && 0, && 0, && 0, && 0, && 0, && 1).
\end{aligned}
$$

このとき、W は S の h コピーを含まない。実際、もしそうでないとすると、W を先頭 2 個の座標に制限したもの、すなわち Y が T の h コピーを含み、これは最初の仮定に反する。

除去補題を用いるために 9-partite 8-graph $\mathcal{H}$ を構成する。その頂点集合として S の面と平行な平面たちを用いたい。そこで S の面を $\{F_0, \ldots, F_8\}$ とする。ただし F_i は s_i を含まない面とし、その法線ベクトルを n_i とする。W の点を少なくともひとつ通り、F_i と平行な平面の集合を V_i とする。計算してみると $n_0 = (1, 0, 1, 2, 2, 2, 1, 0)$ であり、V_0 の平面はこれを法線ベクトルにもち W の点を通るから

$$x_1 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = b$$

と表記できる。ただし b は左辺に W の点を代入して得られる整数である。そのような b が何通りあるか見積もりたい。ここでは正確な値は必要ではなく、可能な b の個数が高々N の定数倍であることがわかればよい。実際、$|x_i| \le N$ であるから大雑把に見積もっても

$$|b| \le |x_1 + \cdots + 2x_6 + x_7| \le |x_1| + \cdots + |2x_6| + |x_7| \le 9N$$

で、ここから $|V_0| \le 19N = O(N)$ が従う。同様に n_i は N に依存しない（定数）整数ベクトルにとれるから、$|V_i| = O(N)$ である。

ここで $\mathcal{H}$ の頂点集合は、$V := V_0 \sqcup \cdots \sqcup V_8$ を頂点分割とする $O(N)$ 点とする。V の 8 点部分集合 $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_8}\}$ の各点を相異なる V_i たちから選んだとき、この 8 点集合が $\mathcal{H}$ の辺となるのは、対応する 8 枚の平面の交点が W の点であるときと定める。W の各点は、その点を通る 9 枚の平面を定め、それは $\mathcal{H}$ の $K_9^{(8)}$ をなす。もし $\mathcal{H}$ の $K_9^{(8)}$ に対応する 9 枚の平面が一点で交わらなければ、それは S の h コピーを与え、W が S の h コピーを含まないという仮定に反する。したがって $\mathcal{H}$ の $K_9^{(8)}$ は、対応する 9 枚の平面が一点で交わり、その交点 $p \in W$ を一意に定める。したがって $\mathcal{H}$ の各辺は $p \in W$ を定め、p に対応する唯一の $K_9^{(8)}$ に含まれる。

つまり $\mathcal{H}$ は $O(N)$ 点 8 グラフで、どの辺もちょうどひとつの $K_9^{(8)}$ に含まれる。したがって

$$|\mathcal{H}| = 9|W| = 9|Y|(2N+1)^6 > \delta(2N+1)^8 = \Omega(N^8)$$

がなりたつ。しかし除去補題の系 3.2 からは $|\mathcal{H}| = o(N^8)$ であり[2]、矛盾が生じた。 □

[2] この系は N 点グラフに関するものなので、もし頂点数が N に足りない場合は $\mathcal{H}$ に頂点を加えて（辺は加えない）形式的に N 点にしてから系を適用すればよい。

練習問題 13. 上に述べた証明を拡張して、定理 3.3 の証明（一般の場合）を完成させよ。

練習問題 14. $\mathbb{F}$ を有限体とする。任意の正整数 d と $\delta > 0$ に対して、ある M_0 が存在し、任意の $M \geq M_0$ と $Y \subset \mathbb{F}^M$ に対して、$|Y| > \delta|\mathbb{F}^M|$ ならば Y は d 次元アファイン空間を含むことを示せ。

講義 4

ハイパーグラフの正則化補題

4.1. 素朴な拡張の問題点

前講では、Fursternberg–Katznelson の定理（これは等差数列に関する Szemerédi の定理の高次元版とみなせる）を紹介し、それが k グラフの除去補題を用いて示せることをみた。その除去補題は、k グラフの正則化補題と数え上げ補題から得られる。実はこれらの補題を正しく設定することは、グラフの場合よりかなり難しい。その方法をこれから説明するのだが、ここでそれを天下りに述べても、なぜそのような（複雑に見える）設定が必要なのかわからないだろう。そこで少し遠回りして、一見自然に見える素朴な拡張を試みたら、どんなまずいことが起きるのかを見てみよう。

以下、話を見易くするため 3 グラフ（$k=3$ の場合）について述べる。まず正則化補題を定式化するには、密度と ϵ 正則の定義が必要である。$\mathcal{H}$ を l 部 3 グラフ (l-partite 3-graph) とする。すなわち頂点集合の分割 $V(\mathcal{H}) = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_l$ が与えられていて、任意の辺 $H \in \mathcal{H}$ に対して $|H \cap V_i| = 1$ となる i がちょうど 3 個ある。さて $A, B, C \subset V(\mathcal{H})$ に各 1 点ずつ頂点を持つような $\mathcal{H}$ の辺の本数を $e(A,B,C)$ と書こう。つまり

$$e(A,B,C) := \#\{\{a,b,c\} \in \mathcal{H} : a \in A, b \in B, c \in C\}$$

である。(1.1) に倣って A, B, C の密度を

$$d(A,B,C) := \frac{e(A,B,C)}{|A||B||C|}$$

と定義する。次に (1.2) に倣って三つ組 (V_i, V_j, V_k) が ϵ 正則であるとは、任意の $A \subset V_i$, $B \subset V_j$, $C \subset V_k$ に対して $|A| > \epsilon|V_i|$, $|B| > \epsilon|V_j|$, $|C| > \epsilon|V_k|$ ならば、

$$|d(A,B,C) - d(V_i, V_j, V_k)| < \epsilon$$

であることと定義する。(ϵ, d) 正則も同様に定める。この密度と ϵ 正則の定義のもとに、定理 1.4 を 3 グラフの場合に自然に拡張できる。もちろん条件 (iii) は

(iii) $\#\{\{i,j,k\} : (V_i, V_j, V_j)$ は ϵ 正則でない $\} \leq \epsilon\binom{t}{3}$

となる。

この正則化補題は数学的に正しい言明であって、それ自体に問題はない。何が問題なのか？われわれはこの補題で正則化された (ϵ, d) 正則な構造において、クリークの個数を数えたい、そしてその個数がランダム 3 グラフから得られるものと近いことを期待したい。しかし、次の例が示すようにこれができないのである。つまり、上記のように正則化補題を定式化すると、対応する数え上げ補題が得られないところに問題があるのだ[1]。

例 4.1. 3 グラフ $\mathcal{H}$ を 4 部グラフとして構成しよう。頂点集合を四等分して $V(\mathcal{H}) = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3 \sqcup V_4$ とする。まず同じ頂点集合上に完全 4 部有向グラフをつくる。各ペアの向きは、他のペアとは独立に確率 1/2 でランダムに決める。このグラフにおいて有向三角形をなす 3 点全体を $\mathcal{H}$ の辺集合とする。このときどの三つ組 (V_i, V_j, V_k) も $(\epsilon, 1/4)$ 正則であるが、$\mathcal{H}$ にはクリーク $K_4^{(3)}$ はひとつもない。

練習問題 15. 上の例において、最後の一文にあることを確かめよ。

グラフの正則化では密度を頂点集合（1 点集合族）と辺集合（2 点集合族）から定義したが、同様のことを 3 グラフでおこなうと上記の例のような不都合が生じた。3 グラフの辺集合は 3 点集合族であるが、その密度を測る適切な土台は頂点集合ではなくて、ある 2 点部分集合族なのだ。次節でそれを説明する。

[1] しかしこの定式化も数え上げ以外の応用に使えるかもしれない。実際、これよりもさらに弱い正則性の定式化から、Moshkovitz と Shapira は正則化補題が保証する分割の個数の下界に関する重要な結果を得た。

4.2. 密度を測る土台

前節では、3 グラフ $\mathcal{H} \subset \binom{V}{3}$ の密度を頂点集合から直接に定義すると不都合が生じることをみた。この問題を克服する方法のひとつは、一般に k グラフの密度を $(k-1)$ グラフの上で測る「相対密度」を導入することである。それを述べるため、一般に j グラフ G に含まれる l クリーク $K_l^{(j)}$ の頂点集合を要素とする集合を $K_l(G)$ と表記する。記号で書けば

$$K_l(G) := \{V(K) : K \subset G,\, K \cong K_l^{(j)}\} \subset \binom{V(G)}{l}.$$

このとき $|K_l(G)|$ は G に含まれる l クリークの個数である。

さて 2 グラフ $G \subset \binom{V}{2}$ が与えられたとする。$\mathcal{H} \subset \binom{V}{3}$ の G 上の相対密度を

$$d(\mathcal{H}|G) := \frac{|\mathcal{H} \cap K_3(G)|}{|K_3(G)|}$$

と定義する。つまり G 内の三角形の個数と、そのような三角形に対応している $\mathcal{H}$ の辺の個数の比で密度を定義するのである。ただし右辺の分母が 0 のとき（G に三角形がないとき）は、左辺は 0 であると定める。

次に正則性を定義するのだが、これにはいくつかの方向があり、それぞれに異なる正則化補題と数え上げ補題が得られる。どの方向を選択するかは、正則化補題と数え上げ補題を使って何をしたいか、に依る。

まず基礎となる 3 部 3 グラフの正則性を定義する。改めて $\mathcal{H} \subset \binom{V}{3}$ とし、頂点集合を $V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$ と等分割する。すなわち $|V_1| = |V_2| = |V_3|$ を仮定する。さらに $\mathcal{H}$ はこの頂点分割に対応する 3 部 3 グラフであると仮定する。つまり任意の $H \in \mathcal{H}$ は $|H \cap V_i| = 1$ を各 i について満たすものとする。（あるいは $\mathcal{H}$ の辺のうち、各 V_i から 1 点ずつとる 3 点集合の辺のみを考え、それ以外の辺を無視すると思ってもよい。）ここで同じ頂点集合上の 3 部 2 グラフ G が与えられたとする。このとき、$\mathcal{H}$ が G に関して (δ, d, r) 正則 であるとは、G の任意の部分グラフ $G_1, \ldots, G_r$（ただしこの中に同じものが複数回含まれてもよい）について、もし

$$\left| \bigcup_{i \in [r]} K_3(G_i) \right| \geq \delta |K_3(G)| > 0$$

であるならば、

$$\frac{\left|\mathcal{H} \cap \bigcup_{i\in[r]} K_3(G_i)\right|}{\left|\bigcup_{i\in[r]} K_3(G_i)\right|} = d \pm \delta$$

が成り立つことである。$d = d(\mathcal{H}|G)$ のときには、すなわち

$$d = \frac{|\mathcal{H} \cap K_3(G)|}{|K_3(G)|}$$

のときには、(δ, d, r) 正則のかわりに $(\delta, *, r)$ 正則ともいう。また $r = 1$ のときには $(\delta, d, 1)$ 正則を (δ, d) 正則ともいう。

次に一般の 3 グラフ $\mathcal{H} \subset \binom{V}{3}$ の正則性を定義するために、その土台となる分割構造を構成する。正整数 a_1, a_2 が与えられたとする。このとき分割構造 $\boldsymbol{P}(a_1, a_2) = \{P^{(1)}, P^{(2)}\}$ とは一点集合の分割 $P^{(1)}$ と二点集合の分割 $P^{(2)}$ からなり、次の条件をみたすものである。

$P^{(1)}$ は V を a_1 個に分割する。すなわち

$$P^{(1)} = \{V_1, \ldots, V_{a_1}\} \tag{4.1}$$

であり、$V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_{a_1}$ をみたす。

$P^{(2)}$ は $P^{(1)}$ 上の完全 a_1 部グラフ G の辺集合を分割するが、このとき各 $1 \le i < j \le a_1$ について、V_i, V_j 間にある $|V_i||V_j|$ 本の辺を a_2 個に分割する。すなわち $E(G)$ を V_i, V_j に制限して得られる辺集合を $\bigsqcup_{1\le k\le a_2} E_{i,j,k}$ と分割し、この分割をすべての i, j についておこなって、以下の分割を得る。

$$P^{(2)} = \{E_{i,j,k} : 1 \le i < j \le a_1,\ 1 \le k \le a_2\}. \tag{4.2}$$

ここで正の実数 η, δ が与えられたとしよう。上記の $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(a_1, a_2)$ がさらに以下に述べる条件 (4.3), (4.4), (4.5) をみたすとき、分割構造 $\boldsymbol{P}$ は (η, δ) 均等 であるという。その定義を述べるため、V の 3 点集合のうち、異なる分割集合から一点ずつ選んだもの全体を $\mathrm{Cr}_3(P^{(1)})$ と表記する。つまりこれは V の分割 $P^{(1)} = \{V_1, \ldots, V_{a_1}\}$ から定まるもので、記号で書けば

$$\mathrm{Cr}_3(P^{(1)}) := \bigsqcup_{1\le i_1<i_2<i_3\le a_1} \{\{x, y, z\} : x \in V_{i_1},\ y \in V_{i_2},\ z \in V_{i_3}\}.$$

この集合に入る辺を crossing edge とよぶ。

まず $P^{(1)}$ については、この分割が等分であること、すなわち

$$|V_1| = \cdots = |V_{a_1}| \tag{4.3}$$

を要求する。$n := |V|$, $m := |V_i|$ とおけば、$n = a_1 m$ である。さらに $\mathrm{Cr}_3(P^{(1)})$ が $\binom{V}{3}$ とあまり違わないことを要求する。より正確には $\binom{V}{3} \setminus \mathrm{Cr}_3(P^{(1)})$ はある V_i から 2 点以上選ぶ 3 点集合であるが、その割合が全体の η を超えないこと、すなわち

$$\left|\binom{V}{3} \setminus \mathrm{Cr}_3(P^{(1)})\right| = \binom{n}{3} - \binom{a_1}{3} m^3 \le \eta \binom{n}{3} \tag{4.4}$$

を要求する。これは a_1 の下界を与える。実際 n が十分大、η が十分小の場合には $a_1 > 3/\eta$ が得られる。

次に $P^{(2)}$ については、任意の $1 \le i < j \le a_1$, $1 \le k \le a_2$ について、頂点集合 $V_i \sqcup V_j$, 辺集合 $E_{i,j,k}$ の二部グラフを H とすると

$$H \text{ は } (\delta, \tfrac{1}{a_2}) \text{ 正則であること} \tag{4.5}$$

つまり、任意の $A \subset V_i$, $B \subset V_j$ について $|A||B| \ge \delta m^2$ ならば、H の (A, B) における相対密度が次式

$$\frac{|\{ab \in E(H) : a \in A,\, b \in B\}|}{|A||B|} = \frac{1}{a_2} \pm \delta$$

をみたすことを要求する。このとき $E_{i,j,k}$ はそのサイズが $\frac{m^2}{a_2}$ に近いだけでなく、(4.5) の意味で V_i, V_j 間からランダムに選んだように見える。

4.3. 正則化の定義、正則化補題、数え上げ補題

分割構造 $\boldsymbol{P} = \{P^{(1)}, P^{(2)}\}$ が (4.1) と (4.2) と満たすと仮定する。V から 3 点 x, y, z を $x \in V_{i_1}, y \in V_{i_2}, z \in V_{i_3}$ から選んだとしよう。ただし i_1, i_2, i_3 は異なる 3 個の添字である。このとき

$$xy \in E_{i_1,i_2,k_1}, yz \in E_{i_2,i_3,k_2}, xz \in E_{i_1,i_3,k_3}$$

となるような $k_1, k_2, k_3 \in [a_2]$ が一意的に定まる。ここで

$$\hat{P}(xyz) := E_{i_1,i_2,k_1} \sqcup E_{i_2,i_3,k_2} \sqcup E_{i_1,i_3,k_3}$$

とおく。つまり $\hat{P}(xyz)$ は xyz を代表元として定まる $V_{i_1} \sqcup V_{i_2} \sqcup V_{i_3}$ 上の 3 部 2 グラフであり、これを xyz から定まる polyad とよぶ。その全体を $\hat{\mathcal{P}}$ とおく。すなわち

$$\hat{\mathcal{P}} := \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le a_1} \{\hat{P}(xyz) : x \in V_{i_1},\, y \in V_{i_2},\, z \in V_{i_3}\}.$$

このとき $|\hat{\mathcal{P}}| = \binom{a_1}{3} a_2^3$ であり、V 上の $P^{(1)}$ から定まる完全 a_1 部 3 グラフの辺は、次のように polyad が定める同値類に分割される。

$$\mathrm{Cr}_3(P^{(1)}) = \bigsqcup_{\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}} K_3(\hat{P})$$

したがって $\mathcal{H} \cap \mathrm{Cr}_3(P^{(1)})$ の各辺 H に対して $H \in K_3(\hat{P})$ となるような $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$ がちょうど一つ対応する。

以上で $\mathcal{H} \subset \binom{V}{3}$ の正則性を定義する準備が整った。正整数 r と正の実数 δ_3 および分割構造 $\boldsymbol{P}$ が与えられたとする。このとき $\boldsymbol{P}$ から $\hat{\mathcal{P}}$ が定まり、各 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$ に対して、$\mathcal{H}$ が $\hat{P}$ に関して $(\delta_3, *, r)$ 正則であるかどうかが決まる。そこで

$$\mathrm{Bad}(\boldsymbol{P}) := \{\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}} : \mathcal{H} \text{ は } \hat{P} \text{ に関して } (\delta_3, *, r) \text{ 正則でない } \}$$

とおく。

定義 $\mathcal{H}$ が $\boldsymbol{P}$ に関して $(\delta_3, *, r)$ 正則であるとは

$$\sum_{\hat{P} \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{P})} |K_3(\hat{P})| \le \delta_3 \binom{|V|}{3}$$

を満たすことである。

以上の設定の下で、3 グラフについて次の形の正則化補題が得られる。

定理 4.2. 任意の $\eta, \delta_3 \in \mathbb{R}^+$ と任意の関数 $r : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ および $\delta_2 : \mathbb{N}^2 \to (0, 1]$ に対して、ある $t_0, n_0 \in \mathbb{N}$ が存在し、以下をみたす。

$n \ge n_0$ で $t_0!$ が n を割り切るならば、任意の n 頂点 3 グラフ $\mathcal{H}$ に対して定数 $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ と分割構造 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(a_1, a_2)$ が存在し、次の条件を満たす。

(i) $\boldsymbol{P}$ は $(\eta, \delta_2(a_1, a_2))$ 均等で、$\max\{a_1, a_2\} \le t_0$ である。
(ii) $\mathcal{H}$ は $\boldsymbol{P}$ に関して $(\delta_3, *, r(a_1, a_2))$ 正則である。

この正則化補題に対応する ($K_4^{(3)}$ を数える) 数え上げ補題は次のようになる。

定理 4.3. 任意の $\gamma, d_3 \in \mathbb{R}^+$ に対して、ある $\delta_3' \in \mathbb{R}^+$ が存在し、$\frac{1}{d_2} \in \mathbb{N}$ であるような任意の d_2 に対して、ある $\delta_2' \in \mathbb{R}^+$ と $r', m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、次が成り立つ。

次の二つの条件が満たされると仮定する。

(i) R は4部2グラフで頂点集合の分割 $V(R)=\bigsqcup_{i=1}^{4} V_i$ が $|V_1|=\cdots=|V_4|=m\geq m_0$ をみたし、任意の $1\leq i<j\leq 4$ について R を $V_i\sqcup V_j$ に制限した2部グラフはすべて (δ_2', d_2) 正則で、かつ

(ii) 3グラフ $\mathcal{H}\subset K_3(R)$ は、任意の $I\in\binom{[4]}{3}$ と R を $\bigsqcup_{i\in I} V_i$ に制限した誘導部分グラフ $R(I)$ に関して、$(\delta_3', *, r')$ 正則であり、その相対密度 $d(\mathcal{H}|R(I))$ は d_3 以上である。

このとき、

$$|K_4(\mathcal{H})|\geq(1-\gamma)d_2^6 d_3^4 m^4$$

である。なお、m_0 を d_2, d_3 の関数とみたとき、どちらの変数についても単調減少であるとしてよい。

上の定理では $K_4(\mathcal{H})$ を数えたが、全く同様に $K_l(\mathcal{H})$ を数えることができる。そのとき、最後の不等式は

$$|K_l(\mathcal{H})|\geq(1-\gamma)d_2^{\binom{l}{2}} d_3^{\binom{l}{3}} m^l$$

となる。もっと一般に、3グラフ $\mathcal{F}$ を固定し、$\mathcal{H}$ に含まれる $\mathcal{F}$ のコピーの個数を評価することもできる。

さらにここで紹介した正則化補題（定理 4.2）と数え上げ補題（定理 4.3）は3グラフに関するものであったが、これらは自然に k グラフ $(k\geq 3)$ に拡張することができる。

4.4. 近似型の正則化と数え上げ

前節では与えられた3グラフ $\mathcal{H}$ を正則化した。この節では $\mathcal{H}$ の代わりに「$\mathcal{H}$ にとてもよく似た3グラフ $\mathcal{G}$」を正則化する手法を紹介する。あるいは同じことだが $\mathcal{H}$ からほんの少しだけ辺を除去したり付け加えたりして $\mathcal{G}$ をつくり、それを正則化するのである。こうすることで、$\mathcal{H}$ をそのまま正則化する場合に生じるいろいろの困難を、$\mathcal{G}$ への変更によって回避したい。つまり $\mathcal{G}$ は $\mathcal{H}$ より扱いやすい構造を持ち、例えば数え上げが容易（密な数え上げ補題が適用可能）になるようにしたい。$\mathcal{H}$ は $\mathcal{G}$ とほとんど変わらないのだから、$\mathcal{G}$ における数え上げの結果は、$\mathcal{H}$ におけるそれとあまり変わらないだろう。実際、このような流れに基づいた正則化と数え上げを、以下のように定式化できるのだ。定理を述べるため、ひとつだけ用語を定義する。分割構造 $\boldsymbol{P}$ から定まる polyads 全体を $\hat{\mathcal{P}}$ とするとき、3グラフ $\mathcal{G}$ が $\boldsymbol{P}$ に関して ϵ 全正則 で

あるとは、任意の $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$ について $\mathcal{G} \cap K_3(\hat{P})$ が $\hat{P}$ に関して $(\epsilon, *, 1)$ 正則であることをいう。

定理 4.4. 任意の $\eta, \nu_{\mathrm{RAL}} \in \mathbb{R}^+$ と任意の関数 $\epsilon_{\mathrm{RAL}} : \mathbb{N}^2 \to (0, 1]$ に対して、ある $t_0, n_0 \in \mathbb{N}$ が定まり、次が成り立つ。

任意の n 頂点 3 グラフ $\mathcal{H}$ が $n \geq n_0$ と $t_0!|n_0$ を満たせば、同じ頂点集合上のある 3 グラフ $\mathcal{G}$ と分割構造 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(a_1, a_2)$ が存在して、以下の性質を満たす。

(i) $\boldsymbol{P}$ は $(\eta, \epsilon_{\mathrm{RAL}}(a_1, a_2))$ 均等で、$\max\{a_1, a_2\} \leq t_0$.

(ii) $\mathcal{G}$ は $\boldsymbol{P}$ に関して $\epsilon_{\mathrm{RAL}}(a_1, a_2)$ 全正則。

(iii) $|\mathcal{G} \triangle \mathcal{H}| \leq \nu_{\mathrm{RAL}} \binom{n}{3}$.

$\boldsymbol{R} = \{R^{(1)}, R^{(2)}\}$ が $\underline{(m, l, 2)\ 複体}$ であるとは、$R^{(1)}$ が頂点集合の l 等分割、すなわち $R^{(1)} = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_l$, $|V_1| = \cdots = |V_l| = m$ をみたし、$R^{(2)}$ が $R^{(1)}$ 上の l 部 2 グラフ（の辺集合）であることをいう。任意の $\{i, j\} \in \binom{[l]}{2}$ に対して $V_i \sqcup V_j$ で誘導される $R^{(2)}$ の 2 部グラフが (ϵ, d) 正則であるとき、この $(m, l, 2)$ 複体は (ϵ, d) 正則であるという。さらに $\Lambda = \{i, j, k\} \in \binom{[l]}{3}$ に対して $V_i \sqcup V_j \sqcup V_k$ で誘導される $R^{(2)}$ の 3 部グラフを $R^{(2)}[\Lambda]$ と表記する。

二つの 3 グラフ $\mathcal{H}, \mathcal{G} \subset K_3(R^{(2)})$ が $\boldsymbol{R}$ に関して $\underline{\nu\ 近接}$ であるとは、任意の $\Lambda \in \binom{[l]}{3}$ に対して

$$\left| \Big(\mathcal{H} \cap K_3(R^{(2)}[\Lambda]) \Big) \triangle \Big(\mathcal{G} \cap K_3(R^{(2)}[\Lambda]) \Big) \right| \leq \nu \left| K_3(R^{(2)}(\Lambda)) \right|$$

が成り立つことと定義する。このとき上の不等式の両辺をすべての Λ について和をとることで

$$|\mathcal{H} \triangle \mathcal{G}| \leq \nu |K_3(R^{(2)})|$$

が得られる。

定理 4.5. 任意の $\gamma, d_3 \in \mathbb{R}^+$ に対して、ある $\nu_{\mathrm{CL}} \in \mathbb{R}^+$ が存在し、任意の $d_0 \in \mathbb{R}^+$ に対して、ある $\epsilon_{\mathrm{CL}}, m_0 \in \mathbb{R}^+$ が存在して、次が成り立つ。

次の条件が満たされると仮定する。

(i) $\boldsymbol{R} = \{R^{(1)}, R^{(2)}\}$ は $(\epsilon_{\mathrm{CL}}, d_2)$ 正則な $(m, 4, 2)$ 複体で、$d_2 \geq d_0$, $m \geq m_0$.

(ii) $\mathcal{G} \subset K_3(R^{(2)})$ は任意の $\Lambda \in \binom{[4]}{3}$ と $R^{(2)}[\Lambda]$ に関して $(\epsilon_{\mathrm{CL}}, d_\Lambda)$ 正則で $d_\Lambda \geq d_3$.

(iii) $\mathcal{H} \subset K_3(R^{(2)})$ は $\boldsymbol{R}$ に関して $\mathcal{G}$ に ν_{CL} 近接。

このとき、

$$|K_4(\mathcal{H})| \geq (1-\gamma)d_2^6\, d_3^4\, m^4$$

である。なお、m_0 は d_0 の関数として単調減少である。

上記の ν_{CL} は $\nu_{\mathrm{CL}} = d_3\gamma/64$ ととることができる。

講義 5

3 グラフの除去補題の証明

本講では、3 グラフの除去補題を正則化補題と数え上げ補題を用いて証明する。証明するのは次の結果である。

定理 5.1. 任意の $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ に対して、ある $\delta \in \mathbb{R}^+$ と $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、次のことが成り立つ。$n > N_0$ で n 点 3 グラフ $\mathcal{H}$ に含まれる $K_4^{(3)}$ の個数が δn^4 以下ならば、$\mathcal{H}$ から ϵn^3 本の辺を除去して $K_4^{(3)}$-*free* にできる。

前講では、正則化補題と対応する数え上げ補題を二種類紹介した。一つは、「定理 4.2（正則化補題）と定理 4.3（数え上げ補題）」であり、もう一つは、「定理 4.4（正則化補題）と定理 4.5（数え上げ補題）」である。どちらの組合せでも除去補題を証明できるから、その両方を紹介しよう。

はじめに前者（定理 4.2 と定理 4.3）を用いて除去補題を示す。証明の方針は次の通り。与えられた ϵ に対して十分小さな $\delta_3 \ll \epsilon$ をとり、定理 4.2 を適用して正則化する。次に、正則でない、あるいは疎な polyad の上にある $\mathcal{H}$ の辺と、crossing edges ではない辺ををすべて除去し、$\mathcal{H}'$ を得る。δ_3 を十分小さく選んだことから、除去した辺は高々 ϵn^3 本であることを確かめる。実は $\mathcal{H}'$ には $K_4^{(3)}$ がないのだが、それを背理法で示すため $\mathcal{H}'$ に $K_4^{(3)}$ があったとする。その部分に定理 4.3 を適用して、$\mathcal{H}'$ に（したがって $\mathcal{H}$ にも）含まれる $K_4^{(3)}$ の個数が δn^4 より多くなることを確かめ、矛盾を得る。

証明の流れとしては、正則化して、次に数え上げるのだが、後半の数え上げがうまく機能するように正則化する前に数え上げ補題のための定数に関する前処理が必要となる。

証明. $\epsilon > 0$ が与えられたとする。定理 4.3（数え上げ補題）を適用するために

$$\gamma = \tfrac{1}{4}, \quad d_3 = \epsilon$$

とおくと、定数 δ'_3 が定まる。d_2 の値は後で決めたいので、これを変数として定理 4.3 から d_2 の関数 $\delta'_2(d_2), r'(d_2), m_0(d_2)$ が得られる。

次に定理 4.3（正則化補題）を利用する。このため

$$\begin{aligned} \eta &= \epsilon, \\ \delta_3 &= \min\{\epsilon,\, \delta'_3\}, \\ r(a_1, a_2) &= r'(\tfrac{1}{a_2}), \\ \delta_2(a_1, a_2) &= \min\{\delta'_2(\tfrac{1}{a_2}), \tfrac{1}{a_2}\} \end{aligned}$$

とおく。この時点では d_2, a_1, a_2 は変数であるが、後で $d_2 = \frac{1}{a_2}$ となるように定数として固定される。以上の設定で定理 4.2 により、対応する定数 t_0, n_0 が得られる。さらに

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\epsilon^4}{2t_0^{10}}, \\ N_0 &= \max\left\{n_0,\, t_0 m_0(\tfrac{1}{t_0})\right\} \end{aligned}$$

とおく。

任意の $n > N_0$ と n 頂点 3 グラフ $\mathcal{H}$ が与えられたとする。$\mathcal{H}$ は

$$|K_4(\mathcal{H})| = \#(K_4^{(3)} \text{ in } \mathcal{H}) \le \delta n^4 \tag{5.1}$$

を満たすと仮定し、$\mathcal{H}$ から高々 ϵn^3 本の辺を除去して $K_4^{(3)}$-free にできることを証明しよう。

$n > N_0 \ge n_0$ だから定理 4.2 を $\mathcal{H}$ に適用して分割構造 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(a_1, a_2)$ を得る。この a_1, a_2 は定数であることに注意せよ。$d_2 = \frac{1}{a_2}$ を固定し、$r' = r, \delta'_2, \delta_2$ も定数となった。このとき次の二つが満たされる。

(i) $\boldsymbol{P}$ は (η, δ_2) 均等で、$\max\{a_1, a_2\} \le t_0$ である。

(ii) $\mathcal{H}$ は $\boldsymbol{P}$ に関して $(\delta_3, *, r)$ 正則である。

(i) から次のことがわかる。$\boldsymbol{P}$ が与える頂点の分割を $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_{a_1}$ とすると、$m := |V_i| = n/a_1$ であり、crossing edges でないものの割合は

$$|\tbinom{V}{3} \setminus \mathrm{Cr}_3(P^{(1)})| \leq \eta \tbinom{n}{3} \tag{5.2}$$

をみたす。さらに各 V_i, V_j 間の m^2 個の 2 点集合たちは $\bigsqcup_{k=1}^{a_2} E_{i,j,k}$ と分割され、二部グラフ $(V_i \sqcup V_j, E_{i,j,k})$ は $(\delta_2, \frac{1}{a_2})$ 正則である。

分割構造 $\boldsymbol{P}$ から得られる polyads の集合を $\hat{\mathcal{P}}$ とし、このうち $(\delta_3, *, r)$ 正則でない polyads 全体を $\mathrm{Bad}(\boldsymbol{P})$ とすると、(ii) より

$$\sum_{\hat{P} \in \mathrm{Bad}(\boldsymbol{P})} |K_3(\hat{P})| \leq \delta_3 \tbinom{n}{3} \tag{5.3}$$

である。

さて、$\mathcal{H}$ から以下のどれかに該当する辺をすべて削除しよう。

- (D1) crossing でない辺。これは (5.2) から高々$\eta\binom{n}{3}$.
- (D2) irregular な polyads 上の辺、すなわち、ある $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$ に対して、$\mathcal{H} \cap K_3(\hat{P})$ が $(\delta_3, *, r)$ 正則でないもの。これは (5.3) から高々$\delta_3\binom{n}{3}$.
- (D3) 相対密度が小さい polyads 上の辺、すなわち、ある $\hat{P} \in \hat{\mathcal{P}}$ に対して、$d(\mathcal{H}|\hat{P}) \leq d_3 = \epsilon$ であるもの。これは気前よく評価して高々$\epsilon\binom{n}{3}$.

以上で削除された辺の本数は、高々

$$(\eta + \delta_3 + \epsilon)\tbinom{n}{3} \leq 3\epsilon\tbinom{n}{3} < \epsilon n^3$$

である。

これらの辺を削除して得られた 3 グラフを $\mathcal{H}'$ とする。実は $\mathcal{H}'$ には $K_4^{(3)}$ がない。これを背理法で示すため、$\mathcal{H}'$ が $K \cong K_4^{(3)}$ を含むと仮定し、その頂点を $v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ としよう。v_1, v_2, v_3 から定まる polyad を $\hat{P}_{123}$ とすると、(D2) より $\mathcal{H} \cap K_3(\hat{P}_{123})$ は $(\delta_3, *, r)$ 正則であり、(D3) からその相対密度 $d(\mathcal{H}|\hat{P}_{123})$ は $d_3 = \epsilon$ より大きい。同じことが $\hat{P}_{124}, \hat{P}_{134}, \hat{P}_{234}$ についても成り立つ。つまり $\mathcal{H}'$ は定理 4.3 の条件 (ii) を満たす。次に条件 (i) を確かめよう。まず定数の選び方と m_0 の単調性から

$$m = |V_i| = \frac{n}{a_1} \geq \frac{n}{t_0} > \frac{N_0}{t_0} \geq m_0(\tfrac{1}{t_0}) \geq m_0(\tfrac{1}{a_2}) = m_0(d_2)$$

である。また 4 部 2 グラフ $R := \hat{P}_{123} \cup \hat{P}_{124} \cup \hat{P}_{134} \cup \hat{P}_{234}$ の頂点を $V_i \sqcup V_j$ に制限した 2 部グラフはどの $1 \leq i < j \leq 4$ についても $(\delta_2, \frac{1}{a_2})$ 正則だから、定理 4.3 の条件 (i) も満たされる。したがって定理 4.3 を用いて $|K_4(\mathcal{H}')|$ を下から評価できて

$$\begin{aligned}|K_4(\mathcal{H})| \geq |K_4(\mathcal{H}')| &\geq \frac{3}{4} d_2^6 d_3^4 m^4 \\ &= \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{a_2}\Big)^6 \epsilon^4 \Big(\frac{n}{a_1}\Big)^4 > \frac{\epsilon^4}{2t_0^{10}} n^4 = \delta n^4\end{aligned}$$

であるが、これは (5.1) に矛盾する。 □

次に後者（定理 4.4 と定理 4.5）を用いた除去補題の証明を紹介しよう。

証明. ϵ が与えられたとする。定理 4.5（数え上げ補題）を適用するため、

$$\gamma = \tfrac{1}{4}, \quad d_3 = \epsilon/2, \quad \nu_{\mathrm{CL}} = d_3\gamma/64 = \epsilon/512$$

とおくと、任意の正の変数 d_0 に対して、$\epsilon_{\mathrm{CL}}(d_0), m_0(d_0)$ が存在して、定理 4.5 の (i)–(iii) が成り立つ。

次に定理 4.4（正則化補題）を利用するため、

$$\begin{aligned}\eta &= \epsilon, \\ \nu_{\mathrm{RAL}} &= \epsilon\,\nu_{\mathrm{CL}} = \epsilon^2/512, \\ \epsilon_{\mathrm{RAL}}(a_1, a_2) &= \epsilon_{\mathrm{CL}}(1/a_2)\end{aligned}$$

とおく。定理 4.4 から、定数 t_0, n_0 が定まる。ここで

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{\epsilon^4}{64 t_0^{10}}, \\ N_0 &= \max\{n_0, t_0 m_0(\tfrac{1}{t_0})\}\end{aligned}$$

とおく。

任意の 3 グラフ $\mathcal{H} \subset \binom{[n]}{3}$ が与えられたとする。ただし $n \geq N_0$ と $|K_4(\mathcal{H})| \leq \delta n^4$ を仮定する。$\mathcal{H}$ を定理 4.4 を用いて正則化し、3 グラフ $\mathcal{G}$ と分割構造 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(a_1, a_2)$ を得る。この a_1, a_2 は定数だから、

$$d_0 := 1/a_2$$

と定めることで、$\epsilon_{\mathrm{CL}}, \epsilon_{\mathrm{RAL}}$ と m_0 も定数となった。このとき定理 4.4 から、以下の条件が満たされる。

(i) $\boldsymbol{P}$ は $(\eta, \epsilon_{\mathrm{RAL}}(a_1, a_2))$ 均等で $\max\{a_1, a_2\} \leq t_0$.

(ii) $\mathcal{G}$ は $\boldsymbol{P}$ に関して ϵ_{RAL} 全正則。

(iii) $|\mathcal{G}\triangle\mathcal{H}| \leq \nu_{\mathrm{RAL}}\binom{n}{3}$.

さて、$\mathcal{H}$ から以下の順で該当する辺をすべて削除しよう。$\boldsymbol{P}$ から定まる polyads 全体を $\hat{\mathcal{P}}$ とおく。

(D1) crossing でない辺。これは高々$\eta\binom{n}{3} = \epsilon\binom{n}{3}$.

(D2) $\mathcal{G}$ と $\mathcal{H}$ の差が大きい polyad $\hat{P}$ 上の $\mathcal{H}$ の辺、すなわち

$$\left|\left(\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})\right)\triangle\left(\mathcal{G}\cap K_3(\hat{P})\right)\right| > \nu_{\mathrm{CL}}\left|K_3(\hat{P})\right|$$

であるとき、$\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})$ の辺をすべて削除する。該当する polyads の集合を $\hat{\mathcal{Q}}\subset\hat{\mathcal{P}}$ とすると、

$$\begin{aligned}\nu_{\mathrm{RAL}}\binom{n}{3} &\geq |\mathcal{H}\triangle\mathcal{G}| \\ &\geq \sum_{\hat{P}\in\hat{\mathcal{Q}}}\left|\left(\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})\right)\triangle\left(\mathcal{G}\cap K_3(\hat{P})\right)\right| \\ &> \nu_{\mathrm{CL}}\sum_{\hat{P}\in\hat{\mathcal{Q}}}\left|K_3(\hat{P})\right| \\ &\geq \nu_{\mathrm{CL}}\sum_{\hat{P}\in\hat{\mathcal{Q}}}\left|\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})\right|\end{aligned}$$

であるから、削除される辺の本数は高々

$$\sum_{\hat{P}\in\hat{\mathcal{Q}}}\left|\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})\right| < \nu_{\mathrm{RAL}}\binom{n}{3}/\nu_{\mathrm{CL}} = \epsilon\binom{n}{3}.$$

(D3) $\mathcal{G}$ における密度が低い polyad $\hat{P}$ 上の $\mathcal{H}$ の辺、すなわち

$$d(\mathcal{G}|\hat{P}) < d_3$$

ならば、$\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})$ の辺をすべて削除する。このとき

$$|\mathcal{G}\cap K_3(\hat{P})| \leq d_3|K_3(\hat{P})|$$

であり、また (D2) から

$$|\mathcal{H}\cap K_3(\hat{P})| \leq |\mathcal{G}\cap K_3(\hat{P})| + \nu_{\mathrm{CL}}|K_3(\hat{P})|.$$

そのような polyads の全体を $\hat{\mathcal{Q}}$ とすれば、削除される辺の本数は高々

$$\sum_{\hat{P}\in\hat{\mathcal{Q}}}(d_3+\nu_{\mathrm{CL}})|K_3(\hat{P})| < (d_3+\nu_{\mathrm{CL}})\binom{n}{3} < \epsilon\binom{n}{3}.$$

以上により、(D1)–(D3) で削除される辺の総数は合計で高々$3\epsilon\binom{n}{3} < \epsilon n^3$ である。

削除後に得られた 3 グラフを $\mathcal{H}'$ としよう。除去補題の証明は $\mathcal{H}'$ に $K_4^{(3)}$ がないことを示せば完了する。これを背理法で示すため、$\mathcal{H}'$ が $K \cong K_4^{(3)}$ を含むと仮定し、その頂点を $v_i \in V_i$ $(1 \leq i \leq 4)$ としよう。このとき

$$m := |V_i| = \frac{n}{a_1} \geq \frac{n}{t_0} > \frac{N_0}{t_0} \geq m_0(\tfrac{1}{t_0}) \geq m_0(\tfrac{1}{a_2}) = m_0(d_0)$$

である。$R^{(1)} = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_4$ とおく。K から誘導される polyads 全体を $\hat{\mathcal{Q}}$ とし、これによって $R^{(2)}$ を定める。このとき $\boldsymbol{R} = \{R^{(1)}, R^{(2)}\}$ は $(\epsilon_{\mathrm{RAL}}, \frac{1}{a_2})$ 正則な $(m, 4, 2)$ 複体である。ここで $\frac{1}{a_2} = d_0$ と $\epsilon_{\mathrm{RAL}} < \epsilon_{\mathrm{CL}}$ より、この複体は $(\epsilon_{\mathrm{CL}}, d_0)$ 正則でもある。したがって定理 4.5 の条件 (i) が（$d_2 = d_0$ として）満たされる。

次に各 $\hat{P} \in \hat{\mathcal{Q}}$ に対して

$$d_{\hat{P}} := d(\mathcal{G}|\hat{P}) = \frac{|\mathcal{G} \cap K_3(\hat{P})|}{|K_3(\hat{P})|}$$

とおくと、$\mathcal{G}$ は $\boldsymbol{R}$ に関して ϵ_{RAL} 全正則であるから、$\mathcal{G}$ は $\hat{P}$ に関して $(\epsilon_{\mathrm{CL}}, d_{\hat{P}})$ 正則でもある。さらに (D3) から $d_{\hat{P}} \geq d_3$ である。したがって定理 4.5 の条件 (ii) が満たされる。

最後に (D2) から $\mathcal{H}'$ は $\boldsymbol{R}$ に関して $\mathcal{G}$ に ν_{CL} 近接であり、定理 4.5 の条件 (iii) が満たされる。

以上により、$\mathcal{H}'$ に定理 4.5 を適用できて、

$$\begin{aligned}
|K_4(\mathcal{H}')| &\geq (1-\gamma) d_2^6 d_3^4 m^4 \\
&\geq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a_2}\right)^6 \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^4 \left(\frac{n}{a_1}\right) \\
&\geq \frac{3\epsilon^4}{64 t_0^{10}} n^4
\end{aligned}$$

が従う。しかしこれは最初の仮定から得られる評価

$$\frac{\epsilon^4}{64 t_0^{10}} n^4 = \delta n^4 \geq |K_4(\mathcal{H})| \geq |K_4(\mathcal{H}')|$$

に矛盾する。 □

講義 6

Szemerédi–Trotter の定理とその応用

6.1. 点と直線の接続関係

平面上に n 個の点 $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ と m 本の直線 $L = \{l_1, \ldots, l_m\}$ があるとき、P と L の接続関係を

$$I(P, L) := \{(p, l) \in P \times L : \text{点 } p \text{ は直線 } l \text{ 上にある }\}$$

と定める。さらに

$$f(n, m) := \max\{|I(P, L)| : |P| = n,\ |L| = m\}$$

とおく。

問題 6.1. $f(n, m)$ を求めよ。つまり n, m を固定したとき、$|I(P, L)|$ の最大値は何か。さらにそれを達成する P と L を特徴付けよ。

(P, L, I) から二部グラフを作れる。つまり $P \sqcup L$ を頂点集合、I を辺集合とする。上の問題は、この二部グラフの最大サイズ（辺の本数の最大値）とそれを達成するグラフを問う。二直線は高々1 点でしか交わらないから、対応する二部グラフには $C_4 = K_{2,2}$ がない。次の結果は Kövári–Sós–Turán[**17**] による。

定理 6.2. n 点グラフ G のサイズが $n^{2-\frac{1}{t}}$ 以上ならば、G は $K_{t,t}$ を含む。

証明. $G=(V,E)$, $V=\{x_1,\dots,x_n\}$, $|E|\geq e:=n^{2-\frac{1}{t}}$ とする。握手補題から

$$2|E|=\sum_{i=1}^{n}\deg_G(x_i)\geq 2e. \tag{6.1}$$

次に、新たに二部グラフ H を頂点集合 $V(H)=V(G)\sqcup\binom{V(G)}{t}$ 上につくる。そのため $x\in V(G)$ と $T\in\binom{V(G)}{t}$ に対して、

$$\{x,T\}\in E(H)\quad\Longleftrightarrow\quad N_G(x)\supset T$$

と定める。もし H の $\binom{V(G)}{t}$ 側の平均次数が $\geq t$ であったならば、$\deg_H(T)\geq t$ なる $T\in\binom{V(G)}{t}$ が存在する。このとき $y_1,\dots,y_t\in N_H(T)$ とすると、$N_G(y_i)\supset T$ が $1\leq i\leq t$ について成り立つ。各 i について $y_i\notin T$ だから $\{y_1,\dots,y_t\}$ と T は disjoint であり、これらは G において $K_{t,t}$ を構成する。

そこで H の $\binom{V(G)}{t}$ 側の平均次数が大きいことを示そう。

$$\begin{aligned}|E(H)|&=\sum_{i=1}^{n}\deg_H(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\binom{\deg_G(x_i)}{t}\\&\geq n\binom{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\deg_G(x_i)}{t}\geq n\binom{2e/n}{t}\geq t\binom{n}{t}.\end{aligned}$$

ここで、最初の不等式は二項係数の凸性から[1]、二番目の不等式は (6.1) から、最後の不等式は直接計算[2]による。ここから平均次数 $|E(H)|/\binom{n}{t}$ が t 以上であることがわかる。 □

$n=|P|$, $m=|L|$ の場合に得られる二部グラフは頂点数が $n+m$ で $K_{2,2}$ を含まない。そこで上の定理を $t=2$ で適用して

$$|I(P,L)|\leq(n+m)^{3/2} \tag{6.2}$$

を得る。

練習問題 16. 有限射影平面は $n:=q^2+q+1$ 個の点と $m:=q^2+q+1$ 本の直線からなり、どの点も $q+1$ 本の直線が通り、どの直線上にも $q+1$ 個の点がある。この例から C_4 を含まない n 点グラフの最大サイズは $\Theta(n^{3/2})$ であることを確かめよ。

[1] f が凸関数なら $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(a_i)\geq f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i)$ である。(Jensen の不等式)
[2] この節の末尾を見よ。

練習問題 17. $\mathbb{F}_q^3$ の一次元部分空間全体を P, 二次元部分空間全体を L とする。P を点の集合、L を直線の集合として、(P, L) が射影平面とみなせることを示せ。($p \in P$ が $l \in L$ の部分空間であるとき、点 p は直線 l 上にあると解釈する。)

練習問題 18. n 点グラフ G が C_4 を含まないならば、

$$|E(G)| \leq \frac{n}{4}(\sqrt{4n-3}-1)$$

であることを示せ。

練習問題 19. $m \times n$ の $(0,1)$ 行列が J_2 を小行列にもたないとき、この行列の 1 の個数を上から評価せよ。ただし J_2 は成分がすべて 1 の 2 次正方行列である。

有限射影平面の例からわかるように「二直線は高々一点で交わる」という条件のみを使って得られる接続関係の最大サイズの評価は（定数倍を除いて）(6.2) が最善である。しかし「$\mathbb{R}^2$ 上の」点と直線については評価を改善できる。それが次の Szemerédi–Trotter の定理 [**18**] である。

定理 6.3. $\mathbb{R}^2$ 上に n 個の点の集合 P と m 本の直線の集合 L が与えられたとき、その接続関係は次の不等式をみたす。

$$|I(P, L)| \leq C\left((mn)^{\frac{2}{3}} + m + n\right).$$

ただし C は定数である。

練習問題 20. 上の不等式は定数を除いて最善であることを示せ。

例 1 $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$, $L = \{p_i$を通る r 本の直線 $: 1 \leq i \leq n\}$.

例 2 一般の位置にある m 本の直線の集合 L と、L の二直線の交点として得られる点の集合 P. ($|P| = \binom{|L|}{2}$)

例 3 $P = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq x \leq k,\ 1 \leq y \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor\}$,
$L = \{y = ax + b : 1 \leq a \leq \lfloor \frac{n}{2k^2} \rfloor,\ 1 \leq b \leq \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor\}$.

この定理の証明はどこかで $\mathbb{R}^2$ 特有の性質を利用しなければならない。ここではグラフの平面描画における交差点数を利用する Székely の証明 [**19**] を紹介しよう。そのために少し準備する。

形式的には、グラフ G を平面上に描くとは、単射 $f : V(G) \to \mathbb{R}^2$ で任意の辺 $e = \{x, y\} \in E(G)$ について $f(x)$ と $f(y)$ を結ぶ辺上には x, y 以外の頂点がないようなものを指定することである。平面上に辺の交

差なしに描けるグラフを平面グラフという。二辺が交差するとは、端点以外に共有点を持つことをいう。（グラフの頂点ではない）ある点 x を通る辺が r 本あるときには、ここに $\binom{r}{2}$ 個の交差があると数える。つまり交差点数を数えるときは重複を考慮する。グラフ G は平面描画を指定するごとに交差点の個数が定まるが、あらゆる描画を考えてその個数の最小値を G の交差点数とよび、$\mathrm{Cr}(G)$ とかく。交差点数が 0 であることと、平面グラフであることは同じである。

練習問題 21. v 点 e 辺の平面グラフ G は、$e \le 3v-6$ をみたすことを示せ。

ヒント. G は 2 連結[3]であると仮定してよい（そうでない場合には 2 連結になるまで平面性を保ったまま辺を加えよ）。2 連結平面グラフの面の境界は閉路である。面の個数を f とすると、オイラーの公式から $v+f-e=2$. また f 個の面の境界の閉路の長さをそれぞれ $l_1,\dots,l_f$ とすると、$2e = l_1+\cdots+l_f \ge 3f$. □

定理 6.4 ([**20, 21**]). v 点 e 辺グラフ G が $e \ge 4v$ をみたせば、

$$\mathrm{Cr}(G) > \frac{e^3}{64v^2}.$$

証明. G の e 本の辺をを 1 本ずつ描いていき、e' 本目までは辺の交差なしに描けるが、その後は必ず交差が生じるとしよう。このとき $e' \le 3v-6$ であり、残りの $e-e'$ 本の辺はどれも、はじめの e' 本と少なくとも一つの交差を持つ。したがって

$$\mathrm{Cr}(G) \ge e - e' \ge e-(3v-6) > e-3v. \tag{6.3}$$

次に $\mathrm{Cr}(G)=t$ とし、この交差点数を実現する G の平面描画を固定する。G のランダム誘導部分グラフ H を以下の通り構成する。すなわち、G の各頂点について独立に確率 p で H の頂点とする。このとき H の頂点数と辺数の期待値はそれぞれ pv, p^2e である。したがって $|E(H)|-3|V(H)|$ の期待値は p^2e-3pv である。一方、G の各交差は確率 p^4 で H の交差となる。したがってこの平面描画における H の交差点数の期待値は p^4t である。しかしこの描画は（G では最適であるが）H の交差点数を最小化するとは限らないから、H の交差点数の期待値は高々p^4t である。これらをふまえて (6.3) を H（の期待値）に適用すると、

$$p^4t > p^2e - 3pv.$$

[3]任意のひとつの頂点（とその頂点に接続しているすべての辺）を取り除いても連結であるとき、そのグラフは 2 連結であるという。

これが任意の $0 < p \leq 1$ で成り立つから、$p = 4v/e$ を代入[4]すると $t > \frac{e^3}{64v^2}$ を得る。ただし $p \leq 1$ でなければならないが、これは $e \geq 4v$ という仮定から保証される。 □

定理 6.3 の証明 [**19**]**.** $\mathbb{R}^2$ 上に与えられた P と L に対して、グラフ $G = (V, E)$ を次のように定義する。頂点集合は $V := P$ とし、二頂点 $x, y \in V$ はこの二点が、ある直線 $l \in L$ 上で隣り合っているとき（つまり線分 xy 上にこの二点以外の V の頂点がないとき）辺で結ぶ。このとき $I := I(P, L)$ とおくと、

$$|V| = n, \quad |E| = I - m$$

である。後者を確かめるため、$L = \{l_1, \ldots, l_m\}$ とし、直線 l_i 上に E の辺が e_i 本あるとしよう。すると l_i 上に V の頂点は $e_i + 1$ 個ある。したがって

$$I = \sum_{i=1}^{m} (e_i + 1) = |E| + m.$$

もし $|E| < 4|V|$ なら、$I - m = |E| < 4|V| = 4n$ から

$$I < 4n + m. \tag{6.4}$$

次に $|E| \geq 4|V|$ と仮定し、G の交差点数 $\mathrm{Cr}(G)$ を評価しよう。定理 6.4 から次の下界が従う。

$$\mathrm{Cr}(G) > \frac{|E|^3}{64|V|^2} = \frac{(I - m)^3}{64n^2}.$$

一方、G の頂点を平面上に好きなように配置し、辺は線分（直線の一部）で描いたとしよう。二本の線分は高々一点で交わるから、この描画によって生じる交差の個数は高々 $\binom{m}{2}$ である。このことから次の自明な上界を得る。

$$\mathrm{Cr}(G) \leq \binom{m}{2} < \frac{m^2}{2}.$$

上の二つの不等式から $(I - m)^3 < 32m^2n^2$, すなわち

$$I < (32)^{\frac{1}{3}} (mn)^{\frac{2}{3}} + m. \tag{6.5}$$

結局 (6.4) または (6.5) が成り立つから、例えば

$$I < \max\{4n + m, (32)^{\frac{1}{3}} (mn)^{\frac{2}{3}} + m\} < 4 \left((mn)^{\frac{2}{3}} + m + n \right)$$

[4] t が最大になるように p を選ぶと $p = 4.5v/e$ で、ここから $t > 4e^3/(243v^2)$ が従う。ただし $e \geq 4.5v$ が必要となる。

と評価してよい。 □

6.2. 和の集合、積の集合

実数の有限部分集合 $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して、A と B の和の集合、積の集合を次のように定める。

$$A + B := \{a + b : a \in A,\, b \in B\},$$
$$A \cdot B := \{ab : a \in A,\, b \in B\}.$$

A のサイズを固定したとき、例えば $|A| = n$ であるとき、$A+A$ や $A \cdot A$ のサイズはどれくらい小さくできるだろうか。

練習問題 22. A が等差数列の場合と等比数列の場合について、

$$\min\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Theta(|A|),$$
$$\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} = \Theta(|A|^2)$$

であることを示せ。

A をうまく選べば、$|A + A|$ と $|A \cdot A|$ の大きい方はもっと小さくなるだろうか。Erdős と Szemerédi はそうはならないと考えた [**22**]。すなわち任意の $\epsilon > 0$ に対してある $c = c(\epsilon)$ が存在して

$$\max\{|A + A|,\, |A \cdot A|\} \geq c|A|^{2-\epsilon}$$

というのが彼らの予想である。Elekes[**23**] は Szemerédi–Trotter の定理を用いて次の評価を得た。

定理 6.5. ある定数 c が存在して、任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$\max\{|A + A|,\, |A \cdot A|\} \geq c|A|^{\frac{5}{4}}$$

が成り立つ。

証明. 定理 6.3 を利用するため、平面 $\mathbb{R}^2$ 上に点の集合 P と直線の集合 L を定義しよう。点の集合は

$$P := \{(a, b) : a \in A + A,\, b \in A \cdot A\}$$

と定義する。$s := |A + A|$, $p := |A \cdot A|$ とおくと $|P| = sp$ である。次に直線の集合を

$$L := \{y = a(x - b) : a, b \in A\}$$

と定める。$n := |A|$ とおくと、$|L| = (n-1)n$ である[5]。

$a, b \in A$ を固定したとき、方程式 $y = a(x-b)$ で表される L の直線を l とすると、l 上には少なくとも n 個の P の点がある。実際、

$$\{(b+c, ac) : c \in A\} \subset P$$

であり、左辺の n 個の点は l 上にある。L の各直線は n 個以上の P の点を通るので、接続関係のサイズについて

$$|I(P,L)| \geq |A||L| \geq (n-1)n^2$$

が成り立つ。一方、定理 6.3 から

$$\begin{aligned}|I(P,L)| &\lesssim (|P||L|)^{\frac{2}{3}} + |P| + |L| \\ &= (spn^2)^{\frac{2}{3}} + sp + n^2\end{aligned}$$

である[6]。この二つの不等式から

$$n^3 \lesssim (spn^2)^{\frac{2}{3}} + sp + 2n^2 \tag{6.6}$$

を得る。これを用いて

$$sp \gtrsim n^{\frac{5}{2}} \tag{6.7}$$

を示そう。すると目標の $\max\{s, p\} \gtrsim n^{\frac{5}{4}}$ が従う。

(6.6) の右辺の三つの項のうち、オーダーが一番大きいのはどれだろうか。いま $n \to \infty$ の状況を考えていて左辺が n^3 だから、右辺三項目の $2n^2$ は無視できる。もし二項目の sp が最大なら $n^3 \lesssim sp$ だから (6.7) が従う。残ったのは一項目が最大の場合で、このとき $n^3 \lesssim (spn^2)^{\frac{2}{3}}$ から (6.7) を得る。 □

この章では、Larry Guth 著 “Polynomial methods in combinatorics” の 7 章の話題の一部を紹介した。Van Vu と Terence Tao による “Additive combinatorics” の 8 章も同様の話題を扱っている。

定理 6.2 の証明の最後の不等式について。目標の不等式は

$$\prod_{i=0}^{t-1} \frac{2n^{1-1/t} - i}{n-i} \geq \frac{t}{n} \tag{6.8}$$

---

[5] $0 \notin A$ ならば $|L| = n^2$ である。

[6] 定数 C が存在して $f(n) \leq Cg(n)$ のとき $f(n) \lesssim g(n)$ と書くことにする。

と同値。ここで $\frac{a}{b} \geq \frac{a-1}{b-1}$ と $b \geq a$ が同値であることに注意しよう。$a = 2n^{1-1/t}$, $b = n$ の場合には $b \geq a$ は $2 \leq n^{1/t}$ あるいは $t \leq \log_2 n$ と同値である。このとき (6.8) の左辺は $> \left(\frac{2n^{1-1/t}-t}{n-t}\right)^t$ だから、$\frac{2n^{1-1/t}-t}{n-t} > (t/n)^{1/t}$ すなわち

$$(2n^{1-1/t} - t)n^{1/t} \geq t^{1/t}(n-t)$$

を示せばよい。より強く、

$$2n \geq tn^{1/t} + nt^{1/t}$$

を示そう。まずこの不等式は $t = 1$ では正しいから、$t \geq 2$ とする。上式右辺の一項目 $(tn^{1/t})$ は t の関数として $t = \log n$ まで単調減少、その後は単調増加であり、$t = 2$ のとき $2\sqrt{n}$, $t = \log_2 n$ のとき 2 である。つまり一項目は $2\sqrt{n}$ 以下である。上式右辺の二項目については $t^{1/t} \leq e^{1/e} < 1.45$ であることから二項目は $1.45n$ より小さい。以上のことから上式右辺は $< 2\sqrt{n} + 1.45n$ をみたす。結局、上式は

$$2n \geq 2\sqrt{n} + 1.45n$$

から従うが、これは実際 $n \geq 14$ で正しい。

$2 \geq n^{1/t}$ の場合には (6.8) の左辺は 1 より大きい。一方、左辺 $t/n \leq 1/2 < 1$ なので、この場合も (6.8) が成り立つ。 $\square$

講義 7

Capset とひまわり

ここでは polynomial methods のひとつとして slice rank を利用する手法とそれから得られる二つの結果を紹介する。一つ目は長さ 3 の等差数列を含まない $\mathbb{F}_3^n$ の部分集合のサイズは $(2.8)^n$ を超えないこと、二つ目は「ひまわり」とよばれる構造を含まない $[n]$ の部分集合族のサイズは $(1.9)^n$ を超えないことを主張[1]する。

7.1. 2016 年の 5 月に起きたこと

アーベル群 G の部分集合が長さ 3 の等差数列を含まないとき、そのサイズはどのくらい大きくなれるだろうか。Croot, Lev, Pach[**24**] は $G = (\mathbb{N}/4\mathbb{N})^n$ の場合に、そのような部分集合のサイズは、ある $c < 4$ に対して高々c^n であることを示した。その証明に示唆されて Ellenberg と Gijswijt は独立に次の結果を得た[2]。

定理 7.1 ([**25**])**.** $X \subset \mathbb{F}_3^n$ とする。任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ について

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \tag{7.1}$$

が成り立つならば、$|X| < c^n$ となるような n に依らない定数 $c < 3$ が存在する。

練習問題 23. $\mathbb{F}_3^n$ の 3 元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}+2\boldsymbol{a}$ は、$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ であるとき長さ 3 の等差数列をなすという。$X \subset \mathbb{F}_3^n$ が長さ 3 の等差数列を含まないことと (7.1) が同値であることを示せ。

[1]どちらも n が十分大きいことを仮定する。
[2]二人の証明はほぼ同じだったので彼らは共著論文として出版した。

(7.1) をみたす部分集合 $X \subset \mathbb{F}_3^n$ を *capset* とよぶ。capset のサイズを評価する問題は、行列乗算の計算量を測る exponent と関連があり、また以下に述べるひまわりの問題とも関連している。相異なる部分集合 $A, B, C \subset [n]$ が $A \cap B = B \cap C = C \cap A$ をみたすとき、これをひまわりとよぶ。次の結果は Erdős と Szemerédi によって予想されたもの [**26**] で、Alon ら [**27**] により定理 7.1 から従うことが知られていた。

定理 7.2. ある $c < 2$ と n_0 が存在して、$n > n_0$ ならばひまわりを含まない $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ は $|\mathcal{F}| < c^n$ をみたす。

一方、Tao は定理 7.1 の証明を検討し slice rank を導入した。そのブログ [**28**] を読んだ Naslund と Sawin は、slice rank を利用して定理 7.2 に直接の証明 [**29**] を与えた。以下に紹介する証明は [**28**] と Zeeuw の講義録 [**30**] を参考にした。

7.2. Slice rank

対称行列は対角成分に零がなければフルランクである。この事実を「高次元化」するために関数の slice rank を導入しよう。

有限集合 X と体 $\mathbb{F}$ および k 変数関数 $f : X^k \to \mathbb{F}$ が与えられたとしよう。このとき f が**スライス関数**とは、f が一変数関数 a と $k-1$ 関数 b の積で表されることをいう。例えば

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = a(x_2)\, b(x_1, x_3, \dots, x_k).$$

どんな関数 f も高々$|X|$ 個のスライス関数の和の形に表示できる。実際、$a_z(x) = \delta_{z,x}$, $b_z(x_2, \dots, x_k) = f(z, x_2, \dots, x_k)$ とおけば

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{z \in X} a_z(x_1) b_z(x_2, \dots, x_k)$$

である。そこで f の *slice rank* を f を和の形に表示するために必要なスライス関数の個数の最小値と定義し、$\mathrm{sr}(f)$ と書く。つまり、

$$\mathrm{sr}(f) = \min \left\{ r : f = \sum_{i=1}^{r} g_i,\ g_1, \dots, g_r \text{ はスライス関数 } \right\}$$

である。このとき $\mathrm{sr}(f) \le |X|$ が成り立つ。

補題 7.3 ([**28**])**.** 有限集合 X, 体 $\mathbb{F}$ および整数 $k \geq 2$ を固定する。関数 $f : X^k \to \mathbb{F}$ が

$$f(x_1, \dots, x_k) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \dots = x_k$$

をみたすならば、$\mathrm{sr}(f) = |X|$ である。

証明. k に関する帰納法。$k = 2$ のとき。$\mathrm{sr}(f) \geq |X|$ を背理法で示すため、$r := \mathrm{sr}(f) < |X|$ と仮定する。このときある a_i, b_i たちによって

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{r} a_i(x) b_i(y)$$

と書ける。ここで F（または F_i）を $|X|\times|X|$ 行列で (x,y) 成分が $f(x,y)$（または $a_i(x)b_i(y)$）であるものとすると

$$F=\sum_{i=1}^{r}F_i$$

である。F_i は列ベクトル $(a_i(x))_{x\in X}$ と行ベクトル $(b_i(y))_{y\in X}$ の行列としての積だから、F_i の行列のランクは 1 で、

$$\operatorname{rank}F\le\sum_{i=1}^{r}\operatorname{rank}(F_i)=r.$$

一方 $f(x,y)\neq 0 \iff x=y$ であることから F は対角行列で対角成分は非零であり、したがって $\operatorname{rank}F=|X|>r$ で、矛盾を得た。

次は帰納法のステップだが、記述を簡単にするため $k=3$ の場合を扱う。背理法で示すため $f:X^3\to\mathbb{F}$ が $r:=\operatorname{sr}(f)<|X|$ をみたすと仮定する。このときある非零関数 a_i,b_i を用いて

$$f(x,y,z)=\sum_{i\in I}a_i(x)b_i(y,z)+\sum_{i\in J}a_i(y)b_i(x,z)+\sum_{i\in K}a_i(z)b_i(x,y) \tag{7.2}$$

と書ける。ただし $I\sqcup J\sqcup K=[r]$ であるが、$I\neq\emptyset$ としておこう。

すべての $i\in I$ について $\sum_{x\in X}v(x)a_i(x)=0$ をみたす関数 $v:X\to\mathbb{F}$ 全体がなすベクトル空間を V とする。したがって V は $|I|$ 本の $|X|$ 変数連立 1 次方程式で定義されるから、

$$\dim V\ge|X|-|I|>r-|I| \tag{7.3}$$

である。ここで $v\in V$ を、その台 $S=\{x\in X: v(x)\neq 0\}$ が最大になるようにとる。このとき

$$|S|\ge\dim V \tag{7.4}$$

である。というのも、もし $|S|<\dim V$ であれば、すべての $x\in S$ で $w(x)=0$ となるような非零 $w\in V$ がある[3]。しかしこのとき $v+w$ は S より真に大きい台を持ち、S の選び方に反する。

関数 $g:S^2\to\mathbb{F}$ を $g(y,z)=\sum_{x\in X}v(x)f(x,y,z)$ と定義する。この関数の slice rank を二通りの方法で評価し矛盾を出すことで、背理法のための $\operatorname{sr}(f)<|X|$ が誤りであることを示そう。まず g を (7.2) の右辺から計算しよう。第一項については

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{x\in X}v(x)a_i(x)\right)b_i(y,z)=0.$$

[3] $\dim V=d$ とし、V の basis を $v_1,\dots,v_d$ とすると $w\in V$ は $w=\sum_{i=1}^{d}\alpha_i v_i$ と表せる。任意の $x\in S$ で $w(x)=0$ と仮定し、$|S|$ 本の d 変数連立 1 次方程式 $\sum_{i=1}^{d}\alpha_i v_i(x)=0$ $(x\in S)$ に注目しよう。もし $|S|<d$ ならばこの方程式は非自明な解（つまり $\alpha_1=\dots=\alpha_d=0$ ではない解）をもち、非零 w が得られる。

第二項と三項は次の形に書き換える：

$$\sum_{i\in J} a_i(y)c_i(z) + \sum_{i\in K} a_i(z)c_i(y),$$

ただし

$$c_i(z) = \sum_{x\in X} v(x)b_i(x,z) \quad \text{for } i \in J,$$
$$c_i(y) = \sum_{x\in X} v(x)b_i(x,y) \quad \text{for } i \in K.$$

したがって

$$g(y,z) = \sum_{i\in J} a_i(y)c_i(z) + \sum_{i\in K} a_i(z)c_i(y),$$

つまり g は $|J|+|K|$ 個のスライス関数の和で書けるから、

$$\mathrm{sr}(g) \le |J| + |K| = r - |I|. \tag{7.5}$$

次に $g(y,z) \ne 0 \iff y = z$ であることを示そう。実際、$y \ne z$ ならば $f(x,y,z) = 0$ だから $g(y,z) = \sum_x v(x)f(x,y,z) = 0$. もし $y = z$ ならば $g(y,y) = \sum_x v(x)f(x,y,y) = v(y)f(y,y,y) \ne 0$ が $y \in S$ について成り立つ。そこで帰納法の仮定と (7.3) および (7.4) から、

$$\mathrm{sr}(g) = |S| \ge \dim V > r - |I|,$$

しかしこれは (7.5) と矛盾する。 □

次の補題はある関数の slice rank の上界を与える。この関数は後で capset の問題、ひまわりの問題を調べるのに用いる。

補題 7.4. 体 $\mathbb{F}$, 有限集合 $Y \subset \mathbb{F}$ および $X \subset Y^n$ を固定する。ただし n は正整数である。関数 $f : X^3 \to \mathbb{F}$ を

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^{n} \big((x_i + y_i + z_i)^s - t\big) \tag{7.6}$$

と定める。ただし $t \in \mathbb{F}$, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする。$(0,1)$ 区間上の実数値関数 $g(x) = x^{-\frac{s}{3}}(1 + x + \cdots + x^s)$ に対し、$g'(x) = 0$ の唯一の根を α とする。このとき

$$\mathrm{sr}(f) < 3(g(\alpha))^n.$$

特に次が成り立つ。

(i) $s = 2$ かつ $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$ ならば、$\mathrm{sr}(f) < 3(2.76)^n$.

(ii) $s = 1$ かつ $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ならば、$\mathrm{sr}(f) < 3(1.89)^n$.

証明. (7.6) の右辺を展開して、f を次の形の単項式の和に書ける：

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}\, y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n}\, z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}.$$

ここで $\|I\| = \sum_{l=1}^{n} i_l$, $\|J\| = \sum_{l=1}^{n} j_l$, $\|K\| = \sum_{l=1}^{n} k_l$ と定めると $\|I\| + \|J\| + \|K\| \le sn$ である。簡単のため x^I と書いたら $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ のことだと約

束し、y^J と z^K も同様とする。$\|I\|, \|J\|, \|K\|$ のうち一つは高々$sn/3$ であることを使って、f を $f = f_x + f_y + f_z$ と表したい。そのためまず f に現れる単項式のうち $\|I\| \le sn/3$ をみたすものを全部集めて

$$f_x = \sum_I x^I \left(\sum_{J,K} c_{IJK}\, y^J z^K \right)$$

とおく。次に $f - f_{\boldsymbol{x}}$ の単項式で $\|J\| \le sn/3$ をみたすものを集めて

$$f_y = \sum_J y^J \left(\sum_{I,K} c_{IJK}\, x^I z^K \right)$$

とおく。最後に $f_{\boldsymbol{z}} = f - f_{\boldsymbol{x}} - f_{\boldsymbol{y}}$ とする。つまり、

$$f_z = \sum_K z^K \left(\sum_{I,J} c_{IJK}\, x^I y^J \right)$$

であり、和に現れる K は $\|K\| \le sn/3$ をみたす。

定義により f_x は $\#I$ 個のスライス関数の和で、$\|I\| \le sn/3$ をみたす。さらに $\#I \le N$ が成り立つ。ここで N は次の不等式の整数解 $(i_1, \ldots, i_n)$ の個数である。

$$i_1 + \cdots + i_n \le \frac{sn}{3}.$$

ただし各 $1 \le l \le n$ について $0 \le i_l \le s$ とする。解の一つ $(i_1, \ldots, i_n)$ をとり、各 $0 \le u \le s$ について $a_u = |\{i_l : i_l = u\}|$ とおく。このとき次の二つの条件が成り立つ。

(P) $a_0 + \cdots + a_s = n$,

(Q) $a_1 + 2a_2 + \cdots + sa_s \le \dfrac{sn}{3}$.

一方、条件 (P) と (Q) をみたす $(a_0, \ldots, a_s)$ をひとつ固定すると、それに対応する不等式の解 $(i_1, \ldots, i_n)$ の個数は

$$\binom{n}{a_0}\binom{n-a_0}{a_1}\cdots\binom{n-(a_0+\cdots+a_{s-1})}{a_s} = \frac{n!}{a_0!a_1!\cdots a_s!}$$

である。したがって

$$N = \sum \frac{n!}{a_0!a_1!\cdots a_s!},$$

ただし和は条件 (P) と (Q) をみたす $(a_0, \ldots, a_s)$ についてとる。同様に f_y と f_z に現れるスライス関数の個数もそれぞれ N で上から押さえられる。結局 f は高々$3N$ 個のスライス関数の和で書けるから、

$$\mathrm{sr}(f) \le 3N.$$

$(g(x))^n$ を多項展開し、(P), (Q) を考慮して $x \in (0,1)$ とすると、

$$\begin{aligned} x^{-\frac{sn}{3}}(1+x+\cdots+x^s)^n &= \sum_{(\mathrm{P})} \frac{n!}{a_0!\cdots a_s!} x^{a_1+2a_2+\cdots+sa_s-\frac{sn}{3}} \\ &> \sum_{(\mathrm{P}),\,(\mathrm{Q})} \frac{n!}{a_0!\cdots a_s!} x^{a_1+2a_2+\cdots+sa_s-\frac{sn}{3}} \\ &> \sum_{(\mathrm{P}),\,(\mathrm{Q})} \frac{n!}{a_0!\cdots a_s!} = N. \end{aligned}$$

上式最左辺は $(g(x))^n$ だから、$(g(x))^n > N$ が任意の $x \in (0,1)$ について成り立つことがわかった。さらに $g'(x) = 0$ は $(0,1)$ 区間に唯一の根 α をもつことを（少し計算して）確認できる。したがって

$$\mathrm{sr}(f) \le 3N < 3(g(\alpha))^n.$$

(i) $s = 2$ のとき。この場合 $g(x) = x^{-\frac{2}{3}}(1+x+x^2)$ は $x = \alpha := \frac{1}{8}(\sqrt{33}-1)$ で最小となり、$g(\alpha) = \frac{3}{8}(33\sqrt{33}+207)^{\frac{1}{3}} < 2.76$.

(ii) $s = 1$ のとき。この場合 $g(x) = x^{-\frac{1}{3}}(1+x)$ は $x = \alpha := 1/2$ で最小となり、$g(\alpha) = 3/2^{2/3} < 1.89$. □

以上で slice rank を利用する手法の準備が整った。これらを用いて集合 X のサイズを評価したい。ただし X^k がよい条件をみたしているとする。すなわち、その条件から関数 $f : X^k \to \mathbb{F}$ をうまく定めると $f(x_1,\ldots,x_k) \neq 0 \iff x_1 = \cdots = x_k$ が成り立つとしよう。このとき補題 7.3 から $\mathrm{sr}(f) = |X|$ である。一方、補題 7.4 から $\mathrm{sr}(f)$ の上界が得られる。したがって $|X|$ が上界が得られるのだ。次節ではこのアイデアを capset とひまわりの問題に適用しよう。

7.3. 定理の証明

定理 7.1 の証明. $X \subset \mathbb{F}_3^n$ を capset とする。すなわち X は (7.1) をみたす。関数 $f : X^3 \to \mathbb{F}_3$ を次のように定める。

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^{n}\bigl((x_i+y_i+z_i)^2 - 1\bigr).$$

このとき $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \neq 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ である。実際、もし $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ ならば、$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (-1)^n \neq 0$. もし $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ が全部同じでなければ、(7.1) の仮定から $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$ なので $x_i+y_i+z_i \neq 0$ となる i がある。このとき $(x_i+y_i+z_i)^2 = 1$ だから[4]、$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ を得る。したがって補題 7.3 から

$$\mathrm{sr}(f) = |X|. \tag{7.7}$$

[4] ここに $\mathbb{F}_3$ の性質を使っている。

一方、補題 7.4 の (i) から

$$\operatorname{sr}(f) < 3(2.76)^n. \tag{7.8}$$

そこで (7.7) と (7.8) から $|X| = \operatorname{sr}(f) < 3(2.76)^n$ である。このとき、ある N が存在して $n \geq N$ では $3(2.76)^n < 2.8^n$ としてよい。また $\mathbb{F}_3^n$ 自身は capset ではないから、明らかに $|X| \leq 3^n - 1$ であり、$3^N - 1 < c^N$ となるように $2.8 < c < 3$ を選ぶことができる。以上により、$|X| < c^n$ がすべての n について成り立つ。 □

定理 7.2 の証明. 部分集合 $F \subset [n]$ の特性ベクトル $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n$ を $i \in F$ なら $x_i = 1$, $i \notin F$ なら $x_i = 0$ と定義する。集合族 $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ がひまわりを含まないとし、$X \subset \{0,1\}^n$ を $\mathcal{F}$ の特性ベクトルの集合とする。各 $0 \leq k \leq n$ について $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} \cap \binom{[n]}{k}$ とおき、対応する特性ベクトルの部分集合を $X_k \subset X$ とする。このとき $\boldsymbol{x} \in X_k$ ならば $\sum_i x_i = k$ である。

ひまわりがないという条件は、X_k において次の条件に翻訳される[5]: どんな 3 個のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X_k$ もそれが同一のベクトルでなければ、$\boldsymbol{w} := \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$ とおくとき $w_i = 2$ となる i がある。

関数 $f : X_k^3 \to \mathbb{R}$ を次で定義する。

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i + z_i - 2).$$

このとき $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \neq 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ で、補題 7.3 から次を得る。

$$\operatorname{sr}(f) = |X_k|. \tag{7.9}$$

一方、補題 7.4 の (ii) から、

$$\operatorname{sr}(f) < 3(1.89)^n. \tag{7.10}$$

そこで (7.9) と (7.10) から次を得る。

$$|\mathcal{F}| = |X| = \sum_{k=0}^{n} |X_k| = (n+1)\operatorname{sr}(f) < (n+1) \cdot 3(1.89)^n.$$

このとき、ある $c < 2$ と n_0 が存在して、$n > n_0$ ならば $|\mathcal{F}| < c^n$ が成り立つ。 □

[5]この条件は X では一般には成り立たない。というのも、ひまわりのない集合族において二つの相異なる部分集合 $A \subsetneqq B$ があれば、対応する特性ベクトルを $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ とするとき、$\boldsymbol{w} := \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ はすべての i で $w_i \neq 2$ である。

参考文献

[1] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik. 2

[2] B. Green, T.Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Ann. of Math. (2) 167 (2008), 481–547. 2

[3] ———, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401. 3

[4] G. Moshkovitz, A. Shapira. A short proof of Gowers' lower bound for the regularity lemma. Combinatorica 36 (2016), 187–194. 10

[5] K. F. Roth. On certain sets of integers. J. London Math. Soc. 28, (1953) 104–109. 13

[6] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi. Triple systems with no six points carrying three triangles. Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, 939–945, 13

[7] W. T. Gowers. Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma. Geom. Funct. Anal. 7 (1997), 322–337. 4, 10, 17

[8] P. Frankl and V. Rödl, *Extremal problems on set systems*, Random Structures Algorithms **20** (2002), no. 2, 131–164. 17

[9] W. T. Gowers. Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem. Ann. of Math. (2) 166 (2007), 897–946. 17

[10] B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht. The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs. Random Structures Algorithms 28 (2006), no. 2, 113–179. 17

[11] V. Rödl, J. Skokan. Applications of the regularity lemma for k-uniform hypergraphs. Random Structures Algorithms **25** (2004), 1–42. 17

[12] V. Rödl, M. Schacht. Regular partitions of hypergraphs: regularity lemmas. Combin. Probab. Comput. 16 (2007), 833–885. 17

[13] V. Rödl, M. Schacht. Regular partitions of hypergraphs: counting lemmas. Combin. Probab. Comput. 16 (2007), 887–901. 17

[14] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256. 18

[15] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Analyse Math. **34** (1978), 275–291 (1979). 19

[16] J. Solymosi, *A note on a question of Erdős and Graham*, Combin. Probab. Comput. **13** (2004), no. 2, 263–267. 19

[17] T. Kövari, V. T. Sós, P. Turán. On a problem of K. Zarankiewicz. Colloquium Math. 3, (1954). 50–57. 39

[18] E. Szemerédi, W. T. Trotter. Extremal problems in discrete geometry. Combinatorica 3 (1983), 381-392. 41

[19] L. Székely. Crossing numbers and hard Erds problems in discrete geometry. Combin. Probab. Comput. 6 (1997), 353–358. 41, 43

[20] M. Ajtai, V. Chvátal, M. M. Newborn, E. Szemerédi. Crossing-free subgraphs. Theory and practice of combinatorics, 9–12, North-Holland Math. Stud., 60, Ann. Discrete Math., 12, North-Holland, Amsterdam, 1982. 42

[21] F. T. Leighton. Complexity issues in VLSI: optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks. MIT Press Cambridge, MA, USA 1983. 42

[22] P. Erdős, E. Szemerédi. On sums and products of integers. Studies in Pure Mathematics, 1983, 213–218. 44

[23] G. Elekes. On the number of sums and products. Acta Arith. 81 (1997), 365–367. 44

[24] E. Croot, V. F. Lev, P. P. Pach. Progression-free sets in n4 are exponentially small. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 331–337. 47

[25] J. S. Ellenberg, D. Gijswijt. On large subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with no three-term arithmetic progression. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 339–343. 47

[26] P. Erdős, E. Szemerdi. Combinatorial properties of systems of sets. J. Combinatorial Theory Ser. A 24 (1978), no. 3, 308–313. 48

[27] N. Alon, A. Shpilka, C. Umans. On sunflowers and matrix multiplication. Comput. Complexity 22 (2013), no. 2, 219–243. 48

[28] T. Tao. A symmetric formulation of the Croot–Lev–Pach–Ellenberg–Gijswijt capset bound. blog post, 2016, http://terrytao.wordpress.com/2016/05/18/a. 48

[29] E. Naslund, W. Sawin. Upper bounds for sunflower-free sets. Forum Math. Sigma 5 (2017), e15, 10 pp. 48

[30] F. de Zeeuw. A course in arithmetic Ramsey theory (from a PhD course at EPFL, 2017). https://dcg.epfl.ch/page-84876-en.html. 48