

直線の配置から球面の配置へ
— SCHLÄFLI の双 6 線系、LIE の線球変換、GRACE の球面

前原潤 徳重典英

概要. 3次元空間内の5個の単位球面が、どの4個も共有点を持たば、全体の共通部分は空でない。この定理の証明には、四面体の外接球は傍接球を含まないという Grace の結果が本質的に使われる。これらについて自己完結的な証明を与える。そのために必要な Schläfli の双 6 線系、Lie の線球変換なども詳説する。最後の節では、いくつかの問題を提起する。

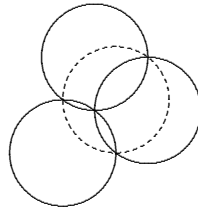
目次

1. はじめに	1
2. 2次曲面と Schläfli の双 6 線系定理	2
3. 3次曲面上の双 6 線系	4
4. 直線の Plücker 座標	5
5. $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の直線族 Λ	7
6. $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の有向球面集合 Θ	7
7. Lie の線球変換	8
8. 四面体の接球面に関する Grace の定理	9
9. \mathbb{R}^3 内の単位球面のある種の配置の非存在	10
10. 球面配置の例と問題	11
11. 付録：射影空間と 2 次曲面	13
参考文献	15

1. はじめに

我々の出発点は円の配置に関する次の定理である。証明は易しい ([6] の 276 ページ, [21])。

定理 1.1. 平面上に定点を与え、そこを通り互いに交差する単位円を 3 つ描くと、新しく 3 つの交点ができる。その 3 点を通る円は単位円である。



従って、平面上に 4 つの単位円を配置して、どの 3 つも共有点を持つが、全体の共通部分は空であるようにできる。このような配置は高次元でも可能だろうか。

問題 1.2. \mathbb{R}^d 内に $d+2$ 個の単位球面 (半径 1 の球面) を配置して、どの $d+1$ 個も共有点を持つが、全体の共通部分は空であるようにできるか。

この問題に入る前に、球面の半径がすべて同じという条件をはずしてみよう。この場合、任意の $d \geq 1$ について、 \mathbb{R}^d 内の $d+2$ 個の球面を、どの $d+1$ 個も共有点をもち、全体の共通部分は空であるように配置できる。一方、 \mathbb{R}^d 内の $d+3$ 個以上の球面は、どの $d+1$ 個も共有点をもつなら、全体の共通部分も空でない [17]。これが半径に条件がない場合の結果で、次元 d で統一的に記述されている。

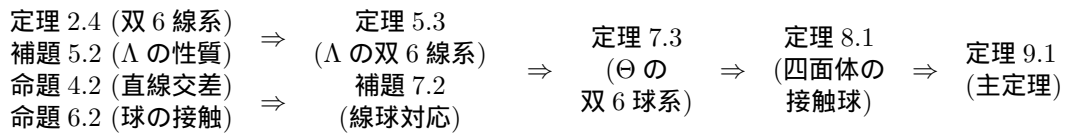
Date: October 2, 2007, 07:54am.

単位球面の場合に戻って、問題 1.2 を考えてみよう。今度は次元 d によって振舞いが異なる。 $d = 1$ ならそのような配置は不可能だが、 $d = 2$ の場合は定理 1.1 から配置は可能である。実は、 $d \geq 4$ でも条件をみだす配置がある [3, 19]。では、3次元ではどうか。 \mathbb{R}^3 内の 5 個の単位球面の配置で、どの 4 個も共有点をもち、全体の共通部分は空のものがあるだろうか。

このような 5 個の単位球面の配置は不可能だと我々は予想した。もし「四面体の外接球は決してその四面体の傍接球を含まない」という主張が証明できれば、予想は正しいことがわかる [19]。我々はこのもっともらしい主張をどうしても証明できなかつた。ところが、2007 年 6 月、Margaret M. Bayer 教授からの指摘で、この主張が一世紀も前に John Hilton Grace [8, 9] によって証明されていたことがわかった。Grace は、四面体の外接球が傍接球を含まないことを示すのに、直線配置に関する Schläfli の双 6 線系 (double six) を Lie の線球変換で球面配置にするという、思いもよらない手法を用いたのだ。

このノートでは、Grace の着想を完全に理解するため、双 6 線系定理 [11, 12, 24] や、線球変換 [4, 10, 15, 20] について解説し、5 個の単位球面の特殊な配置が不可能であることを証明する。証明は他の文献を参照しないで済むように考慮し、基本的な道具である直線の Plücker 座標や反転についても説明した。双 6 線系定理の証明は、3 次曲面の性質を用いるもの、純粋に総合幾何学的 (synthetic) な方法、2 次曲面を用いる方法など [7, 11, 12, 13, 16, 23, 25, 26, 27] 数多くある。ここでは、2 次曲面を用いる市田朝次郎 [13] の方法で証明し、3 次曲面との関連 [12, 23] にも触れた。線球変換は、複素射影空間内の直線全体と、複素射影空間内の有向球面との間の全単射を与えるものである。我々はこれを、複素射影空間内のある直線族 Λ と $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の有向球面全体 Θ の間の全単射として捉え、 \mathbb{R}^3 内の球面配置に適用する便宜を図った。最後の節では、いくつかの問題を提起する。

主定理に至るまでの証明の流れは以下のようにになっている。



2. 2 次曲面と SCHLÄFLI の双 6 線系定理

この節では射影空間内の直線、2 次曲面などを扱う。基礎体 k は \mathbb{R} か \mathbb{C} に固定し、 \mathbb{P}^3 の点を同次座標 $[x, y, z, t]$ で表す。つまり、

$$\mathbb{P}^3 = \{[x, y, z, t] : x, y, z, t \in k, (x, y, z, t) \neq (0, 0, 0, 0)\}$$

である。変数 x, y, z, t の 2 次形式 (同次 2 次多項式) $Q = Q(x, y, z, t)$ の零点集合である 2 次曲面を、2 次形式と同じ記号 Q で表す。2 次形式に関する基本的な事実を定理として次にまとめた。証明は 11 節の付録をみよ (他にも [14] の 2 章など)。これらは明示的な引用なしに以降の証明の中で用いられる。

定理 2.1. \mathbb{P}^3 内の 2 次曲面、 \mathbb{P}^2 内の 2 次曲線について次が成立つ。

- (i) 2 次曲面が直線上の 3 点を含むなら、その直線は 2 次曲面上にある。
- (ii) 平面上の 3 直線を含む 2 次曲面は、その平面を含む。
- (iii) 互いに交わらない 3 直線に対して、それらを含む 2 次曲面が一意的に定まる。
- (iv) 互いに交わらない 3 直線を含む 2 次曲面は、2 組の直線群で 2 重に覆われる線織面である。異なる組の 2 直線は必ず交わり、同じ組の 2 直線は交わらない。
- (v) 2 次曲面が平面を含めば、その 2 次曲面は 2 重平面か、または、2 つの平面の和集合である。
- (vi) 2 次曲面 Q が平面 π を含まないとき、共通部分 $Q \cap \pi$ を、平面 π 上の 2 次曲線という。平面 π 上のある 5 点集合 X の中のどの 4 点も同一直線上なければ、その 5 点を通る π 上の 2 次曲線が一意的に定まる。

互いに交わらない 4 直線 a, b, c, d に対して、これらすべてに交わる直線は何本あるだろうか。 a, b, c は 2 次曲面 Q を決める。4 本目の直線 d は、 Q 上にあるとか Q に接するなどの特別な位置になれば、 Q とちょうど 2 点 p, q で交わるだろう。 Q を掃く直線群で a, b, c が属さない方に、 p, q を通るのがそれぞれ 1 本ずつある。つまり、4 直線に交わる直線は (4 直線が十分一般の位置にあれば) ちょうど 2 本存在する。このことはこのノート全般で繰り返し用いられる。

定義 2.2. 互いに交わらない 4 直線は、この 4 本と交わる直線がちょうど 2 本あるとき、正則の位置にあるという。 $n \geq 4$ 本の直線が正則の位置にあるとは、その中のどの 4 本も正則の位置にあることをいう。

定義 2.3. \mathbb{P}^3 内の 12 本の直線 $g_1, g_2, \dots, g_6; h_1, h_2, \dots, h_6$ が Schläfli の双 6 線系 (double six) をなすとは、 $i \neq j$ ならば g_i と h_j が交わり、それ以外の 2 直線は交わらないことをいう [24]。直線たちを 2 行に記し、異なる行にあってかつ同列にない 2 直線は交わり、それ以外には交わる直線がないとき、これを配線表とよぶ。

例えば配線表

$$\begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{array} \quad (1)$$

は双 6 線系を表す。次の定理は配線表

$$\begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & \\ & & & & & g_6 \end{array} \quad (2)$$

が配線表 (1)、つまり双 6 線系に拡張できるための必要十分条件を与える。

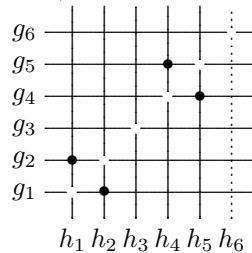
定理 2.4 (Schläfli の双 6 線系定理 [24]). \mathbb{P}^3 内の互いに交わらない 5 直線 h_1, h_2, \dots, h_5 と、この 5 本に交わる直線 g_6 の合わせて 6 本が、双 6 線系に拡張できるための必要十分条件は、 h_1, h_2, \dots, h_5 が正則の位置にあることである。また、双 6 線系に拡張できるなら、拡張は一意的である。

定理 2.4 の証明. はじめに必要性を示す。双 6 線系に拡張できるなら、 h_1, h_2, \dots, h_5 の中のどの 4 本についても、4 本の中の 3 本だけと交わる直線が存在する。この 4 本が正則の位置にあることは次の補題から従う。

補題 2.5. \mathbb{P}^3 内の互いに交わらない 4 直線 a_1, a_2, a_3, a_4 の全部に交わる 2 直線 b_5, b_6 があり、さらに 4 直線の中のちょうど 3 本と交わる直線 b_4 があれば、4 直線は正則の位置にある。

証明. 4 直線 a_1, a_2, a_3, a_4 と交わる直線 b で、 b_5, b_6 と異なるものが存在するとせよ。このとき、 b_5, b_6, b は互いに交わらない。この 3 本の直線の決定する 2 次曲面を Q とせよ。4 直線は Q 上の直線である。 b_4 は 4 直線の中の 3 本と交わるから、これも Q 上の直線であり、4 直線すべてと交わる。これは b_4 が a_1, a_2, a_3, a_4 の中の 3 本だけと交わることに反する。□

次に十分性を示そう。 $i = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して、 $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\} - \{h_i\}$ のすべてと交わる g_6 以外の直線を g_i とする。(後述の配線表 (3) 参照)



まず、5 直線 g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 のすべてに交わる直線 h_6 が存在したとせよ。すると、補題 2.5 により、 g_1, g_2, \dots, g_6 は正則の位置にあるから、 g_3, g_4, g_5, g_6 と交わるのは h_1 と h_2 のみであり、 h_6 と g_6 は交わらない。従って $g_1, \dots, g_6; h_1, \dots, h_6$ は双 6 線系となる。さらに、 g_1, g_2, \dots, g_5 および h_6 は一意的に決まるから、双 6 線系への拡張は一意的である。

h_6 の存在証明は、市田朝次郎 [13] の方法による。 $\{h_1, h_2, h_3\}$ を含む 2 次曲面を Q_1 、 $\{h_3, h_4, h_5\}$ を含む 2 次曲面を Q_2 とする。これらはいずれも互いに交わらない 3 直線を含むから線織面であり、平面を含むことはない。 g_1 は h_3, h_4, h_5 と交わり、 Q_2 と 3 点を共有するから Q_2 に含まれる。同様に Q_2 は g_1, g_2, g_3, g_6 を含み、 Q_1 は g_3, g_4, g_5, g_6 を含む。 g_1 は h_1 と交わらず、 h_2, h_3 とは交わるから、 g_1 は Q_1 とちょうど 2 点で交わる。一方、 g_1 は Q_2 に含まれるから $Q_1 \neq Q_2$ である。

$Q_1 \cap Q_2$ は 2 直線 h_3, g_6 を含む。この 2 本は交わるから平面 h_3g_6 を決める。 h_1 と g_2 の交点 h_1g_2 は、 h_1 上にあるから Q_1 に含まれ、 g_2 上にあるから Q_2 に含まれる。 h_1 は h_3 と交わらないから、平面 h_3g_6 には含まれない。 h_1 とこの平面の交点は h_1 と g_6 との交点だから、点 h_1g_2 は平面 h_3g_6 上に

はないことがわかる。同様に、 $Q_1 \cap Q_2$ は 4 点集合 $X = \{h_1g_2, h_2g_1, h_4g_5, h_5g_4\}$ (図の \bullet) を含み、 X の 4 点はどれも平面 h_3g_6 上にない。

X のどの 3 点も同一直線上にはない。これをみるため、3 点 h_1g_2, h_2g_1, h_4g_5 が直線 ℓ 上にあったとしよう。 ℓ は h_1, h_2 と交わり、 Q_1 は線織面だから ℓ は h_3 と交わる。さらに ℓ は h_4 と交わり、 Q_2 も線織面だから ℓ は h_5 と交わる。結局、 ℓ は h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 と交わるが、この 5 本は正則の位置にあるから、 $\ell = g_6$ でなければならず、これは X の点が平面 h_3g_6 上にないことと矛盾する。

補題 2.6. 4 点集合 X は同一平面上にある。

証明. Q_1, Q_2 はいずれも平面 h_3g_6 を含まず、 $Q_1 \cup Q_2$ も平面 h_3g_6 を含まない。平面 h_3g_6 上の点で、 $Q_1 \cup Q_2$ 上にない点 q をとる。 $\lambda = -Q_2(q)/Q_1(q)$ とおくと、2 次曲面 $\lambda Q_1 + Q_2$ は X の 4 点を通る。この 2 次曲面は 2 直線 h_3, g_6 および点 q を含むから、 q を通り、 h_3, g_6 に交差する直線を含む。従って平面 h_3g_6 を含む。故に、この 2 次曲面は 2 つの平面からなり、 X の 4 点は同一平面上にある。□

次に、 $\{g_1, g_2, g_3\}, \{g_3, g_4, g_5\}$ を含む 2 次曲面 (線織面) をそれぞれ Q_3, Q_4 とする。 Q_3 は h_3, h_4, h_5 を含み、 Q_4 は h_1, h_2, h_3 を含む。また $Q_3 \neq Q_4$ である。 $Q_3 \cap Q_4$ は、直線 g_3 と 4 点集合 X を含む。

補題 2.6 より X を含む平面があるから、それを α とする。もし α が g_3 を含めば、 X の 2 点を通る直線は、 g_3 との交点を合わせて 3 点を Q_3 と共有し、 Q_3 に含まれる。すると、 Q_3 は α 上の直線を 3 本 (以上) 含むから、 Q_3 は α を含むことになり矛盾が生じる。よって、 α は g_3 を含まない。

補題 2.7. $Q_3 \cap Q_4$ は、直線 g_3 と交差する直線 h_6 を含む。

証明. α と g_3 の交点を y とする。各 $i = 3, 4$ に対して Q_i は平面を含まないから、 $\alpha \cap Q_i$ は、5 点 $X \cup \{y\}$ を通る α 上の 2 次曲線である。この 5 点の中のどの 4 点も同一直線上にないから、5 点を通る 2 次曲線 C が一意に決まる。故に、 $Q_3 \cap \alpha = Q_4 \cap \alpha$ で、 $Q_3 \cap Q_4$ は α 上の 2 次曲線 C を含む。

平面 α は $Q_3 \cup Q_4$ に含まれない。点 $q \in \alpha \setminus (Q_3 \cup Q_4)$ をとり、 $\lambda = -Q_4(q)/Q_3(q)$ とおく。2 次曲面 $Q_5 := \lambda Q_3 + Q_4$ は点 q と 2 次曲線 C さらに直線 g_3 を含む。平面 α 上で q を通り C と 2 点で交わる直線が 3 本以上あるから、 Q_5 は α を含む。従って Q_5 は、 α と、 g_3 を含むある平面 β の和である。また、 $Q_3 \cap Q_4 = Q_3 \cap (\lambda Q_3 + Q_4) = Q_3 \cap Q_5$ より、 $Q_3 \cap Q_4 = (Q_3 \cap \alpha) \cup (Q_3 \cap \beta)$ である。

$Q_3 \cap \beta$ は直線 g_3 上にない点、例えば g_3 と交わらない Q_3 上の直線 g_1 と β の交点を含む。また、 $Q_3 \cap \beta$ は 2 次曲線であるから、 $Q_3 \cap \beta$ は g_3 ともう 1 本の直線 h_6 からなる。 g_3 と h_6 は同一平面上にあるから g_3 と h_6 は交わる。 $Q_3 \cap Q_4 \supset Q_3 \cap \beta$ はこの直線 h_6 を含む。□

補題 2.7 で得た h_6 は g_3 と交わる。しかも線織面 Q_3 上にあるから、 g_1, g_2, g_3 と交わり、線織面 Q_4 上にあることから g_3, g_4, g_5 とも交わる。つまり h_6 は g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 と交わる。 h_6 が g_6 と交わらないことは既に示したから、これで定理 2.4 の証明が完了した。□

定理 2.4 の証明から、 h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 が正則の位置にあれば、配線表 (2) から次の配線表

$$\begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 \end{array} \quad (3)$$

が得られ、上の配線表 (3) からは無条件に双 6 線系の配線表 (1) が得られることがわかる。従って配線表 (3) が与えられたとき、 h_1, \dots, h_5 は正則の位置にある。基礎体 $k = \mathbb{C}$ の場合におけるこの事実を、後で定理 7.3 の証明に用いる。双 6 線系の具体例は例 10.1 を見よ。

3. 3 次曲面上の双 6 線系

この節では代数的閉体を任意に 1 つ選んで固定し \mathbb{P}^3 をその上の 3 次元射影空間¹ とする。3 次曲面の性質を利用して、定理 2.4 を \mathbb{P}^3 内の直線に対して証明しよう。概略を知るには [12] の §25 が大変参考になる。3 次曲面上の直線に関する基本的な性質を補題として証明なしに挙げるが、実際の証明はどれも初等的で短いから引用文献を参照すると良い。特に [23] の 7.3 から 7.7 までの約 6 ページには、非特異 3 次曲面上の 27 本の直線の作る組合せ論的な接続関係が証明付きで述べてある。

さて、配線表 (3) の直線 $h_1, \dots, h_5, g_6 \subset \mathbb{P}^3$ が与えられたとする。各 h_i 上に 3 点、 g_6 上に 4 点、合計 $3 \times 5 + 4 = 19$ 点をとる。ただし、これらの点をとる際には、 h_i と g_6 の交点は避けるものとす

¹ 応用上必要なのは \mathbb{C} の場合だから、 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の話だと思って読んでよい。閉体であることは、引用される補題の証明において方程式の根の存在に使われる。

る。この 19 点を通る 3 次曲面 S が一意的に定まる。 S は g_6 と 4 点を共有するから g_6 を含む。 h_i は最初にとった 3 点と g_6 との交点を S と共有し、 S に含まれる。各 g_i は h_1, \dots, h_5 のうち 4 本と交わり、この 4 交点は S 上にあるから g_i も S に含まれる。以上で $h_1, \dots, h_5, g_1, \dots, g_6$ の 11 本が S 上にあることがわかった。

$i \neq j$ のとき、 g_i, h_j を含む平面と g_j, h_i を含む平面との交線を (ij) とかく。直線 (ij) は 4 直線 g_i, g_j, h_i, h_j と交わり、交点はすべて異なる。従って、さらに 10 本の直線 (ij) , $1 \leq i < j \leq 5$ が S 上にある。結局 21 本の直線が S 上にあることがわかった。この S は特異点を持たないことを背理法で示そう。次の補題を利用する。

補題 3.1 ([1] p.206). もし S が特異点 P を持てば、 S 上の直線は P を通る 6 本 l_1, \dots, l_6 と、 l_i, l_j に交わる 15 本の直線 l_{ij} で尽くされる。

$A = \{h_1, \dots, h_5\}$, $B = \{g_1, \dots, g_6\}$ とおく。上の補題を使って S 上の直線を $L = \{l_1, \dots, l_6\}$, $C = \{(ij) : 1 \leq i < j \leq 5\}$ と分割する。 L のどの 2 直線も交わるから $|L \cap A| \leq 1$, $|L \cap B| \leq 1$ である。従って、 $|L \cap C| \geq 4$ となる。一方 (ij) と (kl) は $\{i, j\} \cap \{k, l\} \neq \emptyset$ なら交わらないから、 C からどんな 3 本を選んで、そのうちの 2 本は交わらない。従って、 $|L \cap C| < 3$ となり、矛盾が生じる。よって、 S は非特異でなければならない。

これ以降、 $S \subset \mathbb{P}^3$ を非特異 3 次曲面とする。このとき、次の 2 つの補題が成立つ。

補題 3.2 ([23] 命題 7.1). 任意の点 $P \in S$ に対して、 S 上の直線で P を通るものは高々 3 本しかない。もし 2 本以上あれば、それらは同一平面上にある。

補題 3.3 ([23] 命題 7.3). 与えられた直線 $l \subset S$ に対して、 l と交わる S 上の直線はちょうど 5 組 (l_i, l'_i) が存在し、次のようになっている。

- (i) 各 $i = 1, \dots, 5$ に対して、 $l \cup l_i \cup l'_i$ は同一平面 Π_i 上にある。(従って l_i と l'_i は交わる。)
- (ii) $i \neq j$ ならば、 $(l_i \cup l'_i) \cap (l_j \cup l'_j) = \emptyset$ 。

直線 l 及び 5 つの組 (l_i, l'_i) 以外の任意の直線 $n \subset S$ は、各 i に対して必ず (l_i, l'_i) の片方のみと交わる。実際、補題 3.3 より n は l とは交わらない。 n は Π_i と交わるが、 $S \cap \Pi_i = l \cup l_i \cup l'_i$ だから n は $l_i \cup l'_i$ と交わる。もし n が l_i と l'_i の交点を通ると補題 3.2 に矛盾。

定理 2.4 の証明. 十分性のみ示す。配線表 (3) の直線 $h_1, \dots, h_5; g_1, \dots, g_6 \subset \mathbb{P}^3$ が定まったとする。 g_1, \dots, g_5 と交わり、 g_6 とは交わらない直線 h_6 の存在を示そう。補題 3.3 より h_1 と交わる直線が 5 組 10 本ある。このうち 4 組は、

$$(g_2, (12)), (g_3, (13)), (g_4, (14)), (g_5, (15)).$$

5 組目を (g_6, x) とおく。 g_1 と交わる直線も 5 組 10 本で、そのうち 4 組は、

$$(h_2, (12)), (h_3, (13)), (h_4, (14)), (h_5, (15)).$$

5 組目を (h_6, y) とおく。但し、 h_1 が交わる方を y , 交わらない方を h_6 とする。 h_6 は y と交わる。

h_1 が交わる 10 本は上で尽くされており、その中の 1 本が y だが、

$$y \notin \{g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, (12), (13), (14), (15)\}$$

だから $y = x$ である。補題 3.3 (ii) より $2 \leq i \leq 5$ に対して $(h_6 \cup \{y\}) \cap (h_i \cup (1i)) = \emptyset$ だから、 h_6 は $(12), (13), (14), (15)$ とは交わらない。一方、 h_6 は $(g_i, (1i))$ のどちらか片方とだけ交わるから、それは g_i である。つまり h_6 は g_2, g_3, g_4, g_5 と (そして g_1 とも) 交わる。また h_6 は (g_6, x) のどちらか片方とだけ交わるが、それは $x = y$ だから g_6 とは交わらない。□

以下は我々の目的には必要ないが、 S 上の 27 本の直線配置の決定はあと少しで完了するから、参考までに述べておく。直線 $l \subset S$ と交わる S 上の 5 組 (l_i, l'_i) をとる。 m を l と交わらない直線とし、必要なら記号を付け換えて、各 i に対して m は l_i のみと交わるとしてよい。従って l は l'_i と交わらない。 m と交わる 5 組を (l_i, l'_i) とする。補題 3.3 (ii) を m に適用すると、 $i \neq j$ に対して、直線 l'_i は l_j とは交わらない。一方、 S 上の任意の直線は、各 j に対して l, l_j, l'_j のどれかとは交わるから、 $i \neq j$ なら l'_i は l'_j と交わる。

補題 3.4 ([23] 命題 7.6). $n \subset S$ をこれら 17 本の直線とは異なる任意の直線とすると、 n は 5 本の直線 l_1, \dots, l_5 の中のちょうど 3 本と交わる。逆に、任意に選んだ番号の 3 つ組 $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対して、 l_i, l_j, l_k と交わる直線 $l_{ijk} \subset S$ が l, m 以外にただ 1 本存在する。

この表記では例えば、 $l, l'_1, \dots, l'_5; m, l'_1, \dots, l'_5$ が双 6 線系になる。逆に双 6 線系 $g_1, \dots, g_6; h_1, \dots, h_6$ が与えられたら、この 12 本を含む 3 次曲面上の残りの 15 本の直線は (ij) , $1 \leq i < j \leq 6$ である。

4. 直線の PLÜCKER 座標

直線の Plücker 座標 [22] は、 \mathbb{P}^3 の直線を \mathbb{P}^5 の点として表示する同次座標である。この対応で \mathbb{P}^3 の直線全体は \mathbb{P}^5 の 2 次曲面 M となる。さらに \mathbb{P}^3 の交わる 2 直線に対応する M 上の 2 点を結ぶ直線は M に含まれる。これを利用して、交わる 2 直線の Plücker 座標がもつ条件が求まる。以下の扱いは [5] の 8 章 §6 と [28] の 1 章 §7 を参考にした。

この節では、基礎体は \mathbb{R} か \mathbb{C} に固定しておく。 \mathbb{P}^3 の点を太小文字 x 等で表し、対応する同次座標は $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 等とする。 \mathbb{P}^3 内の異なる 2 点 a, b を通る直線 $\ell = \ell(a, b)$ を

$$\ell(a, b) = \{sa + tb : [s, t] \in \mathbb{P}^1\} \quad (4)$$

と定める。ここで $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$ に対して

$$p_{ij} = p_{ij}(a, b) = a_i b_j - a_j b_i \quad (5)$$

とおく。このとき

$$p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0 \quad (6)$$

が成立つ。また (a_1, a_2, a_3, a_4) と (b_1, b_2, b_3, b_4) は線形独立だから、行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

の階数は 2 で、 p_{ij} はこの行列の小行列式だから、 p_{ij} の全部が 0 ということはない。そこで直線 ℓ の Plücker 座標 $f(\ell) \in \mathbb{P}^5$ を

$$f(\ell) = [p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}] = [a_1 b_2 - a_2 b_1, \dots, a_2 b_3 - a_3 b_2] \quad (7)$$

と定める。表示 (7) が ℓ を指定する 2 点の取り方に依らないことを確かめよう。 $a', b' \in \ell(a, b)$ を取ると (4) より $[s, t], [u, v] \in \mathbb{P}^1$ を用いて $a' = sa + tb$, $b' = ua + vb$ とかける。 $sv - tu \neq 0$ に注意すると、(5), (7) から $f(\ell(a', b')) = (sv - tu)f(\ell(a, b)) = f(\ell(a, b))$ を得る。

命題 4.1. \mathbb{P}^3 内の直線全体の集合を L , \mathbb{P}^5 内の 2 次曲面 M を

$$M = \{[\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta] \in \mathbb{P}^5 : \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0\}$$

とする。 L に属する任意の直線 ℓ に対して、その Plücker 座標 $f(\ell)$ は、(6) により M の点となり、 $f: L \rightarrow M$ は全単射である。

証明. 単射性。2 直線 $\ell, \ell' \in L$ が $f(\ell) = f(\ell')$ をみたすとする。 ℓ 上の 2 点 a, b をとる。 $f(\ell)$ は (7) で定まるが、必要なら座標を取替えて $p_{12} \neq 0$ としてよい。このとき (4) より

$$c = b_1 a - a_1 b = [0, p_{12}, p_{13}, p_{14}], \quad d = b_2 a - a_2 b = [p_{12}, 0, -p_{23}, p_{42}] \quad (8)$$

は ℓ 上の異なる 2 点である。 $f(\ell') = [p'_{12}, p'_{13}, p'_{14}, p'_{34}, p'_{42}, p'_{23}]$ とおけば、 $f(\ell) = f(\ell')$ より、ある $c \neq 0$ が存在して $p'_{ij} = cp_{ij}$ が任意の i, j に対して成立つ。従って、(8) より $c, d \in \ell'$ 、つまり $\ell = \ell'$ である。

全射性。 $P = [\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta] \in M$ をとる。 $\alpha \neq 0$ としてよい。 \mathbb{P}^3 内の異なる 2 点 $c = [0, \alpha, \beta, \gamma]$, $d = [\alpha, 0, -\zeta, \eta]$ をとり、この 2 点を通る直線を $\ell = \ell(c, d) \in L$ とすると、(7) より

$$f(\ell) = [\alpha^2, \alpha\beta, \alpha\gamma, -\beta\eta - \gamma\zeta, \alpha\eta, \alpha\zeta] \quad (9)$$

である。 $P \in M$ より $\alpha\xi = -\beta\eta - \gamma\zeta$ を用いて (9) の右辺を $\alpha \neq 0$ で割ると $P = f(\ell)$ を得る。□

命題 4.2. \mathbb{P}^3 内の 2 直線 ℓ, ℓ' と、その Plücker 座標 $f(\ell) = [\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta]$, $f(\ell') = [\alpha', \beta', \gamma', \xi', \eta', \zeta'] \in M$ について、次の (i), (ii), (iii) は同値である。

- (i) ℓ と ℓ' が交わる。
- (ii) $f(\ell)$ と $f(\ell')$ を通る \mathbb{P}^5 の直線は M に含まれる。

$$(iii) \alpha\xi' + \alpha'\xi + \beta\eta' + \beta'\eta + \gamma\zeta' + \gamma'\zeta = 0.$$

証明. (i)⇒(ii). ℓ が a と b を通り、 ℓ' が a と c を通るとする。このとき

$$f(\ell) = [a_1b_2 - a_2b_1, \dots, a_2b_3 - a_3b_2], \quad f(\ell') = [a_1c_2 - a_2c_1, \dots, a_2c_3 - a_3c_2] \quad (10)$$

であり、この 2 点を通る直線上の点 $Q = [\alpha'', \dots, \zeta''] \in \mathbb{P}^5$ は $[s, t] \in \mathbb{P}^1$ を用いて、 $Q = sf(\ell) + tf(\ell')$ と表せる。このとき (10) を代入して計算すると $\alpha''\xi'' + \beta''\eta'' + \gamma''\zeta'' = 0$ となり、 $Q \in M$ となる。

(ii)⇒(iii). 任意の $[s, t] \in \mathbb{P}^1$ をとり、点 $Q \in \mathbb{P}^5$ を $Q = sf(\ell) + tf(\ell') = s[\alpha, \dots, \zeta] + t[\alpha', \dots, \zeta']$ とおけば、仮定よりこの点は M 上にある。 Q に (6) を適用し、 $f(\ell)$ と $f(\ell')$ も (6) をみたくことを用いると、 $st(\alpha\xi' + \alpha'\xi + \beta\eta' + \beta'\eta + \gamma\zeta' + \gamma'\zeta) = 0$ となる。ここで s, t は任意だから、(iii) が成立つ。

(iii)⇒(i). ℓ が a, b を通り、 ℓ' が c, d を通るとする。このとき (5) より $\alpha = a_1b_2 - a_2b_1, \xi' = c_3d_4 - c_4d_3$ 等であり、これらを代入して (iii) の左辺を計算すると、それは

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

と一致する。従って (iii) より上の行列式の値は 0 である。つまり 4 点 a, b, c, d は \mathbb{P}^3 内の同一平面上にあり、 ℓ と ℓ' は交わる。□

5. $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の直線族 Λ

複素数 a, b, c, d, x, y を用いて、 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の直線の Plücker 座標を

$$[a, x + y\sqrt{-1}, b, c, x - y\sqrt{-1}, d] \quad (11)$$

の形に書くと、条件 (6) は

$$ac + bd + x^2 + y^2 = 0 \quad (12)$$

となる。(11) の形の同次座標を簡単に $\lambda(a, b, c, d, x, y)$ で表す。

定義 5.1. 実数 a, b, c, d, x, y を用いて、(11) の形にかける $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の直線全体を Λ で表す。 Λ は

$$\{\lambda(a, b, c, d, x, y) \in \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) : a, b, c, d, x, y \in \mathbb{R} \text{ は (12) をみたく} \}$$

と自然に同一視できる。

補題 5.2. 4 直線 $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \Lambda$ が互いに交わらず、この 4 本と交わる直線が $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内にちょうど 2 本あるとき、その一方が Λ に属するなら、他方も Λ に属する。

証明. 4 直線を $g_j = \lambda(a_j, b_j, c_j, d_j, x_j, y_j)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) とおくと、 $a_j, b_j, c_j, d_j, x_j, y_j \in \mathbb{R}$ である。直線 $h = \lambda(A, B, C, D, X, Y)$ がすべての g_j と交わるなら、 h は命題 4.2 より連立線形方程式

$$c_jA + a_jC + d_jB + b_jD + 2x_jX + 2y_jY = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (13)$$

をみたくし、さらに $h \in \Lambda$ であれば (12) より 2 次方程式

$$AC + BD + X^2 + Y^2 = 0 \quad (14)$$

もみたくす。(13) は実係数の線形連立方程式だから、互いに独立な実解 $v_k := (A_k, B_k, C_k, D_k, X_k, Y_k)$ ($k = 1, 2, \dots$) を持つ。仮定より 4 直線に交わる直線の片方は Λ に属するから、 v_1 は (14) をみたくす。即ち、 $\theta_1 := A_1C_1 + B_1D_1 + X_1^2 + Y_1^2 = 0$ としよう。つまり $\lambda(v_1) \in \Lambda$ と仮定する。このとき、4 直線と交わるもう一方の Λ の直線を求めよう。

もし v_2 が (14) をみたくせば、 $\lambda(v_2)$ が求める直線である。そこで $\theta_2 := A_2C_2 + B_2D_2 + X_2^2 + Y_2^2 \neq 0$ としよう。4 直線は正則の位置にあり、 $\lambda(v_1)$ も $\lambda(v_2)$ も 4 直線すべてに交わるから、 $\lambda(v_1)$ と $\lambda(v_2)$ は交わらない。従って命題 4.2 より $\omega_{12} := A_2C_1 + A_1C_2 + B_2D_1 + B_1D_2 + 2X_2X_1 + 2Y_2Y_1 \neq 0$ である。ここで $\mu \in \mathbb{R}$ を $\omega_{12} = \mu\theta_2$ で定め、 $v' = v_1 - \mu v_2$ とおく。つまり、

$$(A', B', C', D', X', Y') = (A_1, B_1, C_1, D_1, X_1, Y_1) - \mu(A_2, B_2, C_2, D_2, X_2, Y_2).$$

このとき計算により $A'C' + B'D' + X'^2 + Y'^2 = \theta_1 - \mu(\omega_{12} - \mu\theta_2) = 0$ がわかるから、 v' は方程式 (13), (14) の実解で v_1 と独立、つまり $\lambda(v')$ が求める直線である。□

配線表 (2) から配線表 (1) への拡張は Λ 内で閉じている。即ち、次が成立つ。

定理 5.3 (Λ における双 6 線系). $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ における双 6 線系 $\{g_1, g_2, \dots, g_6, h_1, h_2, \dots, h_6\}$ において、6 本の直線 $h_1, h_2, \dots, h_5, h_6$ が Λ に属するなら、12 本すべてが Λ に属する。

証明. 補題 5.2 により、 g_1, \dots, g_5 および h_6 はすべて Λ に属する。 \square

6. $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の有向球面集合 Θ

\mathbb{R}^3 に無限遠点 ∞ を付け加えてコンパクト化したものを $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ で表す。 $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の球面とは次のいずれかを指す。

実球面: \mathbb{R}^3 内の通常の球面。正の半径を持つ。

平面: \mathbb{R}^3 内の平面に無限遠点 ∞ を追加したもの。

点球: $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の 1 点からなる集合、つまり半径 0 の球面。

実定数 $(a, b, c, d, e) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ に対して、

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + b - 2cx - 2dy - 2ez = 0 \quad (15)$$

が表す図形を考えよう。 a, b, c, d, e をその非零スカラー倍 $\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d, \lambda e$ に置換えても対応する図形は同じだから、図形のパラメタとして同次座標 $[a, b, c, d, e]$ を用いる。

$a \neq 0$ のとき、(15) は $(x - c/a)^2 + (y - d/a)^2 + (z - e/a)^2 = (f/a)^2$ と書換えられる。ここで

$$f^2 = c^2 + d^2 + e^2 - ab \quad (16)$$

とおいた。このとき (15) は中心 $(c/a, d/a, e/a)$ 、半径 $|f/a|$ の実球面 ($f \neq 0$ のとき) か、または、点球 ($f = 0$ のとき) を表す。但し a, b, c, d, e は (16) の右辺が非負になるように選ぶ必要があり、このとき f には 2 通りの選択がある。

$a = 0$ かつ $c^2 + d^2 + e^2 > 0$ のとき、(15) は平面をあらわす。(16) をみたとすように f を選べば、 $(c/f, d/f, e/f)$ はこの平面の単位法線ベクトルである。 $b \neq 0, a = c = d = e = 0$ のとき、(15) は $b = 0$ という矛盾した式になるが、パラメタ $[0, b = 1, 0, 0, 0]$ は点球 $\{\infty\}$ を表すと定義する。

以上で $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の任意の球面は、 $c^2 + d^2 + e^2 - ab \geq 0$ なる実数 a, b, c, d, e による同次座標 $[a, b, c, d, e]$ で一意的に表されることがわかった。さらに (16) をみたとす f の値をも指定した球面を有向球面という。 $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の有向球面は、(16) を満たす実数 a, b, c, d, e, f による同次座標 $[a, b, c, d, e, f]$ で一意的に表される。 $P = (c, d, e) \in \mathbb{R}^3$ に対して点球 $\{P\}$ は $[1, c^2 + d^2 + e^2, c, d, e, 0]$ 、点球 $\{\infty\}$ は $[0, 1, 0, 0, 0, 0]$ である。中心 (x_0, y_0, z_0) 、半径 r の実球面は $[1, x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2, x_0, y_0, z_0, \pm r]$ である。

定義 6.1. $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ の有向球面全体を Θ で表す。つまり、

$$\Theta = \{[a, b, c, d, e, f] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{R}) : -ab + c^2 + d^2 + e^2 - f^2 = 0\}.$$

有向実球面の符号を f/a の符号で、有向平面の符号を f の符号で定める。同じ球面 (平面) に対して f の選び方で符号は正にも負にもなることに注意せよ。正の有向実球面の球面上の点における符号ベクトルをその点から球の中心向きの単位ベクトルと定め、正の有向平面の符号ベクトルは、 $(c/f, d/f, e/f)$ と定める。負の有向実球面、有向平面の符号ベクトルは、正の場合の符号ベクトルの (-1) 倍と定める。

異なる 2 つの球面は、1 点だけを共有するとき接触するという。両方とも点球ではない 2 つの有向球面は、接触し、かつ接点での符号ベクトルが一致するとき正の接触をするという。正の接触をする実球面は、同符号なら内接し、異符号なら外接する。

点球と有向球面は、接触するなら正の接触をするという。従ってある点球が有向球面 $[a, b, c, d, e, f]$ と正の接触をするなら、 $[a, b, c, d, e, -f]$ と正の接触をする。

命題 6.2. 2 つの有向球面 $[a, b, c, d, e, f]$ と $[a', b', c', d', e', f']$ が正の接触をするための必要十分条件は

$$-ab' - ba' + 2cc' + 2dd' + 2ee' - 2ff' = 0$$

である。

証明. 2 球面が有向実球面の場合を示そう。 $a = a' = 1$ としてよい。球面の中心は (c, d, e) と (c', d', e') で半径は $|f|$ と $|f'|$ である。このとき、2 球面が正の接触をするための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} (c - c')^2 + (d - d')^2 + (e - e')^2 &= (f - f')^2 \\ \Leftrightarrow -2cc' - 2dd' - 2ee' + 2ff' + (c^2 + d^2 + e^2 - f^2) + (c'^2 + d'^2 + e'^2 - f'^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2cc' - 2dd' - 2ee' + 2ff' + b + b' &= 0 \quad (\because (16)) \\ \Leftrightarrow -ab' - a'b + 2cc' + 2dd' + 2ee' - 2ff' &= 0 \quad (\because a = a' = 1) \end{aligned}$$

となる。他の場合も同様に証明できる。 \square

7. LIE の線球変換

Plücker 座標が $[\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta]$ である直線と、有向球面 $[a, b, c, d, e, f]$ を対応させるため、

$$\begin{aligned} \alpha &= a, & \beta &= c + d\sqrt{-1}, & \gamma &= e + f, \\ \xi &= -b, & \eta &= c - d\sqrt{-1}, & \zeta &= e - f, \end{aligned} \quad (17)$$

とおくと、 $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = -ab + c^2 + d^2 + e^2 - f^2 = 0$ である。最後の等式は (16) を用いた。従って、(17) は Θ から Λ への全単射を与える。逆変換は次の通り。

$$\begin{aligned} a &= \alpha, & c &= (\beta + \eta)/2, & e &= (\gamma + \zeta)/2, \\ b &= -\xi, & d &= (\beta - \eta)/(2\sqrt{-1}), & f &= (\gamma - \zeta)/2. \end{aligned} \quad (18)$$

定義 7.1. (18) が与える全単射 $\varphi : \Lambda \rightarrow \Theta$, $[\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta] \mapsto [a, b, c, d, e, f]$ を Lie の線球変換 (line-sphere transformation) [4, 10, 15, 20] という。

補題 7.2. 線球変換 $\varphi : \Lambda \rightarrow \Theta$ において、2 直線 g, h が交わることと、2 つの有向球面 $\varphi(g), \varphi(h)$ が正の接触をすることは同値である。

証明. 線球変換で、直線 $[\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \zeta]$ と $[\alpha', \beta', \gamma', \xi', \eta', \zeta']$ が、それぞれ、有向球面 $[a, b, c, d, e, f]$ と $[a', b', c', d', e', f']$ に対応するとき、(17), (18) より

$$\alpha\xi' + \alpha'\xi + \beta\eta' + \beta'\eta + \gamma\zeta' + \gamma'\zeta = 0 \Leftrightarrow -ab' - ba' + 2cc' + 2dd' + 2ee' - 2ff' = 0$$

が成立つ。これに命題 4.2 と命題 6.2 を適用する。 \square

配線表の定義 2.3 において「直線」を「球面」に、「交わる」を「正の接触をする」に置換えたものを配球表とよぶ。次の定理は

$$\begin{array}{cccccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \tau_4 & \tau_5 & \tau_6 \end{array}$$

なる配球表の拡張を保証する。これは定理 2.4 の証明の後に述べた配線表に関する事実を、補題 7.2 と定理 5.3 をふまえて、線球変換で配球表に関する事実を翻訳したものである。なお上の右側の配球表に対応する 12 球面を双 6 球系 (例 10.2 参照) という。

定理 7.3 (Θ における双 6 球系定理). 11 個の有向球面 $\sigma_1, \dots, \sigma_5, \tau_1, \dots, \tau_6 \in \Theta$ において、 $i \neq j$ なら σ_i と τ_j は正の接触をし、他には正の接触をする対はないものとする。このとき、有向球面 $\sigma_6 \in \Theta$ で τ_1, \dots, τ_5 の 5 個に正の接触をし、 τ_6 には正の接触をしないものが存在する。

8. 四面体の接球面に関する GRACE の定理

四面体の 4 頂点を通る球面を四面体の外接球面という。四面体 $ABCD$ の頂点 A, B, C, D の対面の決定する平面を、それぞれ a, b, c, d で表す。4 平面 a, b, c, d に接する球面を四面体の接球面という。四面体をなす各平面が定める半空間のうち、四面体のある側を内側、反対側を外側とよぼう。このとき四面体の接球面は次のように分類できる ([2] p.296 参照)。

内接球面: 4 枚の平面の内側にある接球面、1 個。

傍接球面: 3 枚の平面の内側、1 枚の平面の外側にある接球面、4 個。四面体の面に外側から接する。

9. \mathbb{R}^3 内の単位球面のある種の配置の非存在

ここまでの準備をもとに、このノートの主結果である次の定理を証明しよう。

定理 9.1. \mathbb{R}^3 内の 5 個の単位球面が、どの 4 個も共有点を持たば、全体の共通部分は空でない。

ここで点 $p \in \mathbb{R}^d$ に関する反転を導入する。これは $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ から自分自身への写像で、点 p, ∞ をそれぞれ点 ∞, p に写像し、それ以外の点 x を $p + (x - p)/|x - p|^2$ に写像するものである。反転は 2 回繰り返すと元に戻るから、全単射である。反転によって、 p を中心とする単位球面の内部と外部が入替わり、球面は球面に移る。より具体的には次が成立つ。証明は易しい ([18] の 2 章など)。

命題 9.2. 点 $p \in \mathbb{R}^d$ に関する反転について以下が成立つ。

- (i) 点 p を通らない球面の像は、 p を通らない球面である。
- (ii) 点 p を通る球面の像は、 p を通らない平面で、 p を通らない平面の像は、 p を通る球面である。
- (iii) 点 p を通る平面の像は、その平面自身である。
- (iv) 点 p を内部に含む球面 A を球面 B が含めば、 B の像は A の像である球面の内部にある。

四面体 (を構成する 4 平面) とその内接球面を、内接球面の中心 p で反転すると、4 平面の像は p を通る 4 球面で、内接球面の像はこの 4 球面を内部に含み 4 球面に内接する大きな球面となる。一方、点 p を通る 4 球面と、その 4 球面を内部に含み 4 球面に内接する大きな球面が与えられたとき、これらを点 p で反転すると、4 球面の像は p を通らない 4 平面だが、大きな球面の像は 4 平面の接触球面であり、必ずしも四面体の内接球面にはならない。これは当然のことだが、誤解しやすいので注意しておく。

補題 9.3. 平面上で、円 Γ の中に三角形 Δ があり、 Δ の中に円 γ がある。円 γ の中心に関する反転を ψ とすると、 $\psi(\Gamma)$ の直径は $\psi(\gamma)$ の半径を超えない。両者が等しいのは、 Γ が Δ の外接円で、 γ が Δ の内接円の場合に限る。

証明. 必要なら Δ をそれを含みより大きな三角形で置換え、はじめから Δ が Γ に内接すると仮定してよい。 Δ の中に γ があるから、 Δ と相似の位置にある三角形 Δ' で γ に外接するものが存在する。このとき、 Δ と Δ' の相似の中心 P は Δ' に含まれる。 Δ を Δ' に移す中心 P の相似縮小で、円 Γ を円 Γ' に縮小すると、 Γ' は円 Γ に含まれる。従って $\psi(\Gamma)$ は $\psi(\Gamma')$ に含まれ、 $\psi(\Gamma)$ の直径は、 $\psi(\Gamma')$ の直径以下となる。円 γ の中心を O 、半径を r 、三角形 Δ' の 3 辺を含む 3 直線を a, b, c とする。このとき $\psi(a), \psi(b), \psi(c)$ は O を通る直径 $1/r$ の 3 つの円となる。この 3 円の O 以外の 3 交点を通る円が $\psi(\Gamma')$ である。定理 1.1 より $\psi(\Gamma')$ の直径は、 $\psi(\gamma)$ の半径 $1/r$ に等しい。故に、 $\psi(\Gamma)$ の直径は $1/r$ 以下であり、等しくなるのは $\Gamma = \Gamma'$ の場合に限る。□

補題 9.4. \mathbb{R}^3 内の四面体 T の内接球面を σ 、外接球面を Σ とする。 σ の中心に関する反転を ψ とすると、 $\psi(\Sigma)$ の直径は $\psi(\sigma)$ の半径より小さい。

証明. σ の中心を O 、 Σ の中心を Q とする。点 O, Q と、 T の頂点の 1 つを通る平面 H をとる。平面 H による Σ, T, σ の切り口として、 H 上の円 Γ とその中の三角形 Δ 、その中の円 γ を得る。このとき、 $\psi(\Gamma)$ と $\psi(\Sigma)$ の直径は等しく、 $\psi(\gamma)$ と $\psi(\sigma)$ の半径も等しい。 Γ は Δ の外接円ではないから、補題 9.3 により、 $\psi(\Sigma)$ の直径は $\psi(\sigma)$ の半径より小さい。□

定理 9.1 の証明. 背理法による。以下では、球面 S とその内部を \bar{S} と記す。5 個の単位球面 S_0, S_1, \dots, S_4 の中のどの 4 個も共通部分を持つが、全体の共通部分は空集合だと仮定する。4 個の球面の共通点を接合点と呼ぶ。 S_i 以外の 4 球面の接合点を Q_i とする。 Q_0 は S_1, S_2, S_3, S_4 の接合点で、 S_0 上に 4 点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 がのる。接合点 Q_0 に関する反転を ψ とし、 $\Sigma_i := \psi(S_i)$ 、 $p_i := \psi(Q_i)$ とおく。 $Q_0 \notin S_0$ だから Σ_0 は球面で、 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ は平面である。この 4 平面は p_1, p_2, p_3, p_4 を頂点とする四面体 T を張り、 Σ_i は p_i の対面で、 Σ_0 は T の外接球面である。

ある i について、 $Q_i \in \bar{S}_i$ であることを示そう。 Q_0 が \bar{S}_0 の外部にあるなら、 Q_0 は \bar{S}_0 の外部にあり、四面体 T の外部にある。 T を構成する 4 平面は Q_0 を通らないから、 Q_0 に最も近い平面を Σ_i とすると、 Q_0 と p_i を結ぶ線分は Σ_i と交わる。このとき点 Q_i は $\psi(\bar{\Sigma}_i) = \bar{S}_i$ に含まれる。

必要なら球面の番号を付替えて、 $Q_0 \in \bar{S}_0$ としよう。中心 Q_0 、半径 2 の球面を S' とする。 $\bar{S}_0 \subset \bar{S}'$ で、 \bar{S}_0 は Q_0 を含む単位球だから、 $\psi(S_0)$ とその内部である $\bar{\Sigma}_0$ は $\psi(S')$ を含む。また、 S_1, S_2, S_3, S_4 は Q_0 を通る直径 2 の球面だから、これらは S' に内接する。つまり $\sigma := \psi(S')$ は T の接球面で、外

接球 $\bar{\Sigma}_0$ に含まれる。従って定理 8.1 より、 σ は T の内接球面であり、補題 9.4 より、 $S_0 = \psi(\Sigma_0)$ の直径は、 $\psi(\sigma)$ の半径 2 より小さい。これは S_0 が単位球面であることに反する。□

10. 球面配置の例と問題

例 10.1. \mathbb{R}^3 内の双 6 線系の具体例を挙げよう。この配置の透視図が [12] の 179 ページにある。

直線	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
通る点	(3, 0, 0) (-1, 2, 0)	(0, 3, 0) (0, -1, 2)	(0, 0, 3) (2, 0, -1)	(2, 2, 3) (0, 2, -1)	(3, 2, 2) (-1, 0, 2)	(2, 3, 2) (2, -1, 0)
直線	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6
通る点	(2, 3, 2) (0, -1, 2)	(2, 2, 3) (2, 0, -1)	(3, 2, 2) (-1, 2, 0)	(3, 0, 0) (-1, 0, 2)	(0, 3, 0) (2, -1, 0)	(0, 0, 3) (0, 2, -1)

これらの直線の Plücker 座標は次の表の通りである。これらは Λ の直線ではないが、(18) の定義域を $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の直線全体に広げた線球変換 φ を考えれば、各直線に対応する複素有向球面 (Θ には入らない) が求まる。これらの球面は \mathbb{C}^3 の双 6 球系をなすが、その中には、平面 ($\varphi(h_2), \varphi(h_3), \varphi(g_4), \varphi(g_6)$) と点球 ($\varphi(h_5)$) も含まれる。 $I := \sqrt{-1}$ としている。

i	h_i の Plücker 座標	g_i の Plücker 座標	有向球面 $\varphi(h_i)$	有向球面 $\varphi(g_i)$
1	[6, 0, 4, 0, 2, 0]	[2, -4, -2, 0, 4, -8]	[6, 0, 1, I, 2, 2]	[2, 0, 0, 4I, -5, 3]
2	[0, 0, 0, -2, -4, 6]	[4, 8, 0, -4, 2, 2]	[0, 2, -2, -2I, 3, -3]	[4, 4, 5, -3I, 1, -1]
3	[0, -6, -2, 4, 0, 0]	[-8, -2, -4, -2, 0, 4]	[0, -4, -3, 3I, -1, -1]	[-8, 2, -1, I, 0, -4]
4	[4, -2, 2, 4, 0, -8]	[0, 6, 4, -2, 0, 0]	[4, -4, -1, I, -3, 5]	[0, 2, 3, -3I, 2, 2]
5	[2, 8, 4, 0, -2, 4]	[-6, 0, -2, 0, -4, 0]	[2, 0, 3, -5I, 4, 0]	[-6, 0, -2, -2I, -1, -1]
6	[-8, -4, 0, 2, -4, 2]	[0, 0, 0, 4, 2, -6]	[-8, -2, -4, 0, 1, -1]	[0, -4, 1, I, -3, 3]

以下で考える双 k 球系では点球は除くことにする。つまり、 \mathbb{R}^d 内の相異なる $2k$ 個の球面 (実球面または平面) の配置 $A_1, \dots, A_k; B_1, \dots, B_k$ は、それぞれの球面に符号をつけ、 $i \neq j$ ならば A_i と B_j は正の接触をし、それら以外の 2 球は正の接触をしないことができるとき、双 k 球系をなすという。このとき A_i, B_j は、同符号なら内接、異符号なら外接する。

例 10.2. \mathbb{R}^3 内の実球面のみで構成された双 6 球系の具体例を挙げよう。

A_1	[1, 3, 2, 0, 0, 1]	B_1	[1, -5, -2, 0, 0, 3]
A_2	[1, 3, -1, $\sqrt{3}$, 0, 1]	B_2	[1, -5, 1, $-\sqrt{3}$, 0, 3]
A_3	[1, 3, -1, $-\sqrt{3}$, 0, 1]	B_3	[1, -5, 1, $\sqrt{3}$, 0, 3]
A_4	[1, 2, 0, 0, 3/2, 1/2]	B_4	[1, -10, 0, 0, 3/2, 7/2]
A_5	[1, 2, 0, 0, -3/2, 1/2]	B_5	[1, -10, 0, 0, -3/2, 7/2]
A_6	[1, -25, 0, 0, 0, 5]	B_6	[1, -1, 0, 0, 0, -1]

同次座標の先頭が 1 なので、座標の後ろ 4 つが順に、球の中心、および符号付き半径を表す。この例では、 B_6 と $A_i (i \neq 6)$ たちはすべて外接し、その他の A_i と $B_j (i \neq j)$ はすべて内接する。これらはすべて Θ の球であり、線球変換の逆変換で得られる直線はすべて Λ に入る。 A_2, A_3, B_2, B_3 に対応する直線は \mathbb{C}^3 にあるが \mathbb{R}^3 には入らない。

定理 10.3. $d \geq 1$ とする。 \mathbb{R}^d 内の双 k 球系が存在するなら、 $k \leq d + 3$ である。

証明. 球面の符号は ± 1 に選ぶ。球面 A_i の中心を $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,d})$ 、半径を $r_i > 0$ 、符号を ϵ_i とし、球面 B_j の中心を $(b_{j,1}, b_{j,2}, \dots, b_{j,d})$ 、半径を $r'_j > 0$ 、符号を ϵ'_j とする。球面 A_i に対応する多項式 f_{A_i} を

$$f_{A_i}(x_1, x_2, \dots, x_d, r) = (x_1 - a_{i,1})^2 + (x_2 - a_{i,2})^2 + \dots + (x_d - a_{i,d})^2 + (r - \epsilon_i r_i)^2$$

とおく。このとき

$$f_{A_i}(B_j) = f_{A_i}(b_{j,1}, b_{j,2}, \dots, b_{j,d}, \epsilon'_j r'_j) \begin{cases} \neq 0 & \text{if } i = j \\ = 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

であるから、 $\{f_{A_i}\}$ たちは線形独立である。一方、 $\{f_{A_i}\}$ たちのつくる線形空間は

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_d^2 + r^2, x_1, x_2, \dots, x_d, r, 1$$

で張られるから、次元は高々 $d+3$ 、即ち、独立な f_{A_i} は高々 $d+3$ 個である。故に $k \leq d+3$ である。□

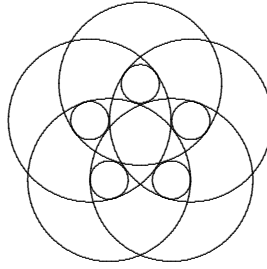
問題 10.4. \mathbb{R}^3 内の双 6 球系として実現可能な球面の符号付けを決定せよ。外接のみでも双 6 球系が構成できるか。

例 10.5. \mathbb{R}^d 内の双 $(d+2)$ 球系を外接のみで構成しよう。単位正 d 単体を固定する。単体の頂点を v_1, \dots, v_{d+1} とし、 v_i の対面を F_i とする。半径 $\epsilon \ll 1$ の球 A_1, \dots, A_{d+2} をとり、頂点 v_i に A_i の中心を合わせ、単体の中心に A_{d+2} を配置する。 F_i 上にある d 個の A_j たち ($j \neq i, d+2$) および A_{d+2} に外接する球を B_i とし、 A_1, \dots, A_{d+1} に外接する球を B_{d+2} とする。すべての A_i に正符号を B_i に負符号をつければ双 $(d+2)$ 球系を得る。

例 10.6. \mathbb{R}^1 内の双 4 球系は存在しない²。これをみるため、双 4 球系 $A_1, \dots, A_4; B_1, \dots, B_4$ が存在したとしよう。各球面はこの場合、2 点集合である。一般性を失わず、 A_1 の片方の点を B_2, B_3 が含むとしてよい。 A_1 と B_2, A_1 と B_3 は正の接触をするから、 B_2 と B_3 は同符号で正の接触をするか、異符号で正の接触をするしかない。いずれの場合も B_2 と B_3 が正の接触をするので矛盾である。

問題 10.7. \mathbb{R}^d 内の双 $(d+3)$ 球系が存在するような d を決定せよ。平面上の双 5 円系は存在するか。

例 10.8. 平面上に 10 個の円 $A_1, \dots, A_5; B_1, \dots, B_5$ を配置して、 $i \neq j$ なら A_i と B_j が接し、他に接する 2 円はないようにできる。下図の小円が A_i たち、大円が B_j たちを表す。この配置を双 5 円系とするような符号付けはない。



11. 付録：射影空間と 2 次曲面

この節では、射影空間を定義し、2 次曲面の基本的な性質、特に定理 2.1 について証明を与える。 k は実数体 \mathbb{R} 、または、複素数体 \mathbb{C} を表すものとする。体 k 上のベクトル空間 k^{n+1} の 1 次元部分空間の全体を n 次元射影空間といい、 \mathbb{P}^n で表す。 \mathbb{P}^n の要素を \mathbb{P}^n の点と呼ぶ。これは k^{n+1} の 1 次元部分空間である。 k^{n+1} の点 $p \neq 0$ (但し 0 は k^{n+1} の原点を表す零ベクトル) は k^{n+1} の 1 次元部分空間 $\{\lambda p \in k^{n+1} : \lambda \in k\}$ を決定するから、 \mathbb{P}^n の点を決定する。この \mathbb{P}^n の点を $[p]$ とかく。 $\lambda \neq 0$ のとき、 $[\lambda p] = [p]$ である。 $p = (x_1, \dots, x_{n+1}) \neq 0$ のとき、 $[p]$ を $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ と書き、これを \mathbb{P}^n の点 $[p]$ の同次座標という。以下では主に $n = 3$ の場合を扱う。

k^4 の 2 次元、3 次元部分空間を、それぞれ、 \mathbb{P}^3 の直線、平面という。 \mathbb{P}^3 内の点、直線、平面に関する以下の事実は、 k^4 の部分空間に戻して考えることによって、容易に確かめることができる。

- (1) \mathbb{P}^3 の相異なる 2 点を通る直線はただ 1 つ存在する。従って、異なる 2 直線の交点は高々 1 個である。
- (2) 同一直線上にない 3 点はその 3 点を通るただ 1 つの平面を決定する。従って、1 本の直線と、その上にない 1 点は 1 つの平面を決定する。
- (3) 1 点で交わる 2 直線は、それらを含む平面を決定する。
- (4) 同一平面上の 2 直線は必ず交わる。
- (5) 平面 π が直線 a を含まないなら、 π と a はただ 1 点で交わる。
- (6) 異なる 2 平面の共通部分は直線である。

²幾何的な構造を無視すると、次のことが知られている。 A_1, \dots, A_m が r 点集合、 B_1, \dots, B_m が s 点集合で、各 $i = 1, \dots, m$ に対して $A_i \cap B_i = \emptyset$ で、各 $1 \leq i, j \leq m$ に対して $i \neq j$ ならば $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ であるとしよう。このとき $m \leq \binom{r+s}{r}$ が成立つ (Bollobás による)。条件の $i \neq j$ を $i < j$ に置換えて仮定を弱めても、結論の不等式は同じものでよい (Lovász による)。

補題 11.1. \mathbb{P}^3 内の互いに交わらない 2 本の直線 a, b と、 $a \cup b$ 上にない任意の点 $[p] \in \mathbb{P}^3$ に対して、点 $[p]$ を通り、 a, b の両方と交わる直線がただ 1 本存在する。

証明. 点 $[p]$ と直線 a の決定する平面を π と書く。直線 b は平面 π と 1 点 $[q]$ で交わる。 $[p], [q]$ を通る直線は平面 π 上にあるから、 a, b の両方と交わる。

$[p]$ を通り、 a, b の両方と交わる直線が 2 本あるとすると、この 2 本は 1 つの平面を決定し、 a, b はこの平面上にあることになる。同一平面上の 2 直線は必ず交わるから、これは仮定に反する。□

$n+1$ 個の変数 x_1, \dots, x_{n+1} についての同次 d 次多項式を x_1, \dots, x_{n+1} に関する d 次形式という。多項式 $F(x_1, \dots, x_{n+1})$ が d 次形式であることと

$$F(sx_1, \dots, sx_{n+1}) = s^d F(x_1, \dots, x_{n+1})$$

が成立つことは同値である。このとき F の各項 (単項式) は $x_1^{i_1} \cdots x_{n+1}^{i_{n+1}}$ の形で、

$$i_1 + \cdots + i_{n+1} = d$$

をみたす。従って $n+1$ 変数の d 次形式の項の総数は、 d を $n+1$ 個の非負整数に分割する個数と等しく、それは $\binom{n+d-1}{d}$ である。例えば 4 変数 2 次形式は $\binom{5}{2} = 10$ 項からなる。

4 変数の 2 次形式 $Q = Q(x, y, z, t)$ と点 $p \in k^4$ および非零 $\lambda \in k$ に対して、 $Q(p) = 0$ ならば $Q(\lambda p) = 0$ である。従って、 \mathbb{P}^3 内の点集合

$$\{[p] \in \mathbb{P}^3 : Q(p) = 0\}$$

が定まる。この点集合を \mathbb{P}^3 内の 2 次曲面といい、2 次形式と同じ記号 Q で表す。2 次形式 Q が定数として 0 (つまり Q の各項の係数が全部 0) であるとき、 $Q \equiv 0$ とかく。 $Q \neq 0$ ならば 2 次曲面 Q が \mathbb{P}^3 に一致することはない。

定理 2.1 (i) の証明. 対偶をとって、直線 a が 2 次曲面 Q に含まれないなら、 a と Q の交点は 2 個以下であることを示そう。直線 a 上に 2 点 $[p], [q]$ をとる。但し $[q] \notin Q$ とする。このとき直線 a 上の任意の点は $(x, y) \neq (0, 0)$ を用いて $[xp + yq]$ と書ける。このような点の中で Q 上の点は、 $x \neq 0$ をみたす。実際 $x = 0$ なら $Q \ni [xp + yq] = [q]$ となり矛盾が生じる。

従って、 $\lambda = y/x$ とおいて、 $[p + \lambda q] \in Q$ をみたす λ が 2 個以下であることを示せばよい。 $Q(p + \lambda q) = 0$ は λ に関する 2 次方程式だから、その根は高々 2 個である。□

定理 2.1 (ii) の証明. \mathbb{P}^3 内の 2 次曲面 Q が、平面 π 上の 3 直線 a, b, c を含むとする。平面 π 上の任意の点 $[p]$ に対して、 $[p]$ を通る π 上の直線で、 a, b, c と異なる 3 点で交わる直線 g を引くことができる。すると、補題 11.1 により、直線 g は Q に含まれるから、 $[p] \in Q$ となる。□

定理 2.1 (iii) の証明. 互いに交わらない 3 直線を a, b, c とする。4 個の変数 x, y, z, t に関する 2 次形式 Q は、

$$x^2, y^2, z^2, t^2, xy, xz, xt, yz, yt, zt$$

の係数 10 個を含む。3 直線 a, b, c の各々から、その上に乗っている点を 3 個ずつ、合計 9 個をとる。これらの各点で Q の値を 0 とおくと、10 個の未知係数についての 9 個の (定数項が 0 の) 線形方程式が得られる。この連立方程式は明らかに自明でない解をもつ。従って、これらの 9 点で 0 となる 2 次形式が $Q \neq 0$ が存在する。 Q は a, b, c の各々の上にある 3 点を含むから、(i) により Q は 3 直線 a, b, c を含む。

一意性をいうために、 Q 上の任意の点 $[p]$ に対して、 $[p]$ を通り a, b, c と交わる Q 内の直線がただ 1 つ存在することを示そう。これがいえると、 a, b, c を含む 2 次曲面は、 a, b, c の全部に交わるような直線上の点全体と一致する。従って a, b, c を含む 2 次曲面は一意的に決まることになる。

Q 上の任意の点 $[p]$ をとる。この点が $a \cup b \cup c$ の点なら、補題 11.1 により、 $[p]$ を通り a, b, c に交わる直線がただ 1 つ存在するからこれでよい。そこで $[p] \in Q$ が $a \cup b \cup c$ に含まれない場合を考えよう。補題 11.1 により、 $[p]$ を通り a, b と交わる直線 f 、 $[p]$ を通り a, c と交わる直線 g 、 $[p]$ を通り b, c と交わる直線 h がそれぞれただ 1 本存在する。実は $f = g = h$ であることを示そう。

f, g, h がすべて異なるなら、 Q は f, g, a が乗っている平面、 f, h, b が乗っている平面、 g, h, c が乗っている平面を含む。これらの 3 つの平面上にない任意の点 $[q] \in \mathbb{P}^3$ を通り、これらの 3 平面と 3 点で交わる直線を引くことができる。この直線は 3 点を Q と共有するから (i) により Q 上にあり、従って $[q] \in Q$ 、つまり $Q = \mathbb{P}^3$ となり矛盾が生じた。従って、 f, g, h がすべて異なることはない。

次に、例えば、 $f = g \neq h$ とすると、直線 a, c が同一平面上にあることになり、 a, c が交わらないことに矛盾する。結局、 $f = g = h$ でなければならない。これは最初にとった Q 上の点 $[p]$ を通り、 a, b, c と交わる Q 内の直線がただ 1 つ ($f = g = h$) 存在することを意味する。□

定理 2.1 (iv) の証明. 互いに交わらない 3 直線 a, b, c を含む 2 次曲面を Q とし、この 3 直線全部と交わる直線全体を L_1 とおく。(iii) の証明で見たように、 Q の各点は L_1 の直線で覆われる。

もし L_1 の 2 直線が交わると、その 2 直線が定める平面上に a, b, c があることになり、矛盾が生じる。従って L_1 のどの 2 直線も交わらない。

L_1 に属する 3 本の直線 f, g, h をとり、 f, g, h の全部と交わる直線全体を L_2 とする。 L_1 のときと同じ議論から、 Q の各点は L_2 の直線で覆われる。つまり Q は 2 組の直線群 L_1, L_2 で 2 重に覆われる。また、 L_2 のどの 2 本も交わらないことは、 L_1 の場合と全く同じ議論で示せる。□

定理 2.1 (v) の証明. Q が平面 π を含むとし、 π に対応する k^4 の 3 次元部分空間を $ax + by + cz + dt = 0$ で定義する。 $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$ であるから、次の形の正則行列を用いて

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

と変数変換すると、2 次形式 $Q(x, y, z, t)$ は、 X, Y, Z, T に関する 2 次形式 $\tilde{Q}(X, Y, Z, T)$ に変わり、平面 π に対応する k^4 の 3 次元部分空間は、方程式 $T = 0$ で表される。ここで

$$\tilde{Q}(X, Y, Z, T) = T \cdot \tilde{F}(X, Y, Z, T) + \tilde{Q}_1(X, Y, Z)$$

と書くと、 \tilde{F} は X, Y, Z, T に関する 1 次形式、 \tilde{Q} は X, Y, Z に関する 2 次形式である。2 次曲面 Q は平面 π を含むから、 $\tilde{Q}(X, Y, Z, 0) = 0$ である。従って、 $\tilde{Q}_1(X, Y, Z)$ はすべての (X, Y, Z) について 0 であり、 $\tilde{Q}_1(X, Y, Z) \equiv 0$ であることがわかる。故に、 $\tilde{Q}(X, Y, Z, T) = T \cdot \tilde{F}(X, Y, Z, T)$ となる。これを、もとの x, y, z, t に戻すと、 x, y, z, t に関する 1 次形式 $F(x, y, z, t)$ を用いて、

$$Q(x, y, z, t) = (ax + by + cz + dt) F(x, y, z, t)$$

と表せる。 $F(x, y, z, t) = ax + by + cz + dy$ なら、 Q は 2 重平面 π であり、 $F(x, y, z, t) \neq ax + by + cz + dy$ なら、 Q は 2 つの平面の和集合である。□

定理 2.1 (vi) の証明. 2 つの 2 次曲面 Q_1, Q_2 に対して、 X が Q_1 にも Q_2 にも含まれ、平面 π が Q_1 にも Q_2 にも含まれないなら、 $Q_1 \cap \pi = Q_2 \cap \pi$ であることを示せばよい。

$X = \{[p_1], \dots, [p_5]\}$ とする。まず、 X の 4 点集合で、その中のどの 3 点も同一直線上にないような 4 点集合が存在することを示そう。 X のどの 3 点も同一直線上にないなら、これは明らかである。 $[p_1], [p_2], [p_3]$ が直線 a 上にあるとしよう。すると、 $[p_4], [p_5]$ は a 上にはない。 $[p_4], [p_5]$ を通る直線を b とすると、 $[p_1], [p_2], [p_3]$ のうちの 2 つは b 上にはない。例えば、 $[p_1], [p_2]$ が b 上にはないとすると、4 点 $[p_1], [p_2], [p_4], [p_5]$ の中のどの 3 つも同一直線上にない。

さて、 $[p_1], [p_2], [p_3], [p_4]$ のどの 3 点も同一直線上にないと仮定する。 $1 \leq i < j \leq 4$ に対して、 $[p_i], [p_j]$ を結ぶ直線を a_{ij} で表す。すると、 $a_{12} \cup a_{34}, a_{13} \cup a_{24}$ のいずれかは $[p_5]$ を含まない。 $a_{12} \cup a_{34}$ が $[p_5]$ を含まないとし、2 直線 a_{12}, a_{34} の交点を $[p_6]$ とする。

次に、 $X \cup \{[p_6]\}$ を含む任意の 2 次曲面 Q は平面 π を含むことを示そう。 Q は直線 a_{12} 上の 3 点 $[p_1], [p_2], [p_6]$ を含むから、(i) より Q は直線 a_{12} を含む。同様に、 Q は直線 a_{34} も含む。平面 π 上の直線で、点 $[p_5]$ を通り $[p_6]$ を通らないものを c とする。 c は a_{12}, a_{34} と 2 点で交わるから、再び (i) により Q に含まれる。 Q は π 上の 3 直線 a_{12}, a_{34}, c を含むから、(ii) により Q は π を含むことがわかった。

2 次曲面 Q_1, Q_2 はいずれも平面 π を含まないから、点 $[p_6]$ を含まない。 $\lambda = Q_1(p_6)/Q_2(p_6)$ とおくと、2 次曲面 $Q_1 - \lambda Q_2$ は $X \cup \{[p_6]\}$ を含む。従って、 $Q_1 - \lambda Q_2$ は π を含む。つまり、 π 上の任意の点 $[q]$ に対して、 $Q_1(q) = \lambda Q_2(q)$ である。 $\lambda \neq 0$ であるから、平面 π 上の点 $[q]$ に対して、 $Q_1(q) = 0$ と $Q_2(q) = 0$ は同値である。故に $Q_1 \cap \pi = Q_2 \cap \pi$ である。□

参考文献

- [1] 秋月康夫, 中井喜和, 永田雅宣. 代数幾何学 岩波書店 1987.
- [2] M. Berger. Geometry I, New York 1987, Springer-Verlag.
- [3] K. Bezdek, Z. Lángi, M. Naszódi, P. Papez. Ball polyhedra, *Discrete Comput. Geom.*, 38 (2007) 201–230.
- [4] J. L. Coolidge. *A treatise on the circle and the sphere*, Chelsea, New York 1916.
- [5] D. コックス, J. リトル, D. オシー. グレブナ基底と代数多様体入門, 落合啓之 他訳, シュプリンガーフェアラーク東京 2000. The Mathematical Experience, Boston 1982, Birkhäuser.
- [6] P.J. デービス, R. ヘルシュ. 数学的経験, 柴垣和三雄, 田中裕, 清水邦夫 訳, 森北出版 1986.
- [7] A. L. Dixon. A proof of Schläfli’s theorem about the double six, *J. London Math. Soc.*, 10 (1935) 274, 11(1936) 202–203.
- [8] J. H. Grace. Circles, spheres, and linear complexes, *Trans. Cambridge Philosophical Society*, 14 (1898) 153–190.
- [9] J. H. Grace. Tetrahedra in relation to spheres and quadrics, *Proc. London Math. Soc.* S2-17 (1918) 259–271.
- [10] S. Helgason. Sophus Lie, the mathematician, *Proc. Sophus Lie Memorial Conference, Oslo*, 1994 3–21.
- [11] A. Henderson. *The twenty-seven lines upon the cubic surface*, Hafner Publishing Company, 1911, New York. *Anschuliche geometrie*, Springer Verlag, 1932, Berlin.
- [12] D. ヒルベルト, S. コーン・フォッセン. 直観幾何学 芹沢正三 訳, みすず書房 1976.
- [13] A. Ichida. A simple poof of double six theorem, *Tohoku Math. J.* 32 (1929) 52–53.
- [14] 川又雄二郎. 射影空間の幾何学, 朝倉書店 2001.
- [15] S. Lie. Marius Sophus Lie’s doctoral thesis “Over en Klasse geometriske Transformationer” [“On a class of geometrical transformations”]. Translated from the Norwegian by Erik Trelle. Commentary by Trelle and Ruggero Maria Santilli. *Algebras Groups Geom.* 15 (1998), no. 4, 395–445.
- [16] R. J. Lyons. A proof of the theorem of the double-six, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 37 (1941) 433–434.
- [17] H. Maehara. *Helly-type theorems for spheres*, *Discrete Comput Geom.*, 4 (1989) 279–285.
- [18] 前原潤. 円と球面の幾何学, 朝倉書店 1998.
- [19] H. Maehara, N. Tokushige. On a special arrangement of spheres, *Ryukyu Math. J.* 19 (2006) 15–24.
- [20] R. Milson. An overview of Lie’s line–sphere correspondence, *Contemporary Mathematics* 285 (2001) 1–10.
- [21] G. ポリア. 数学問題の発見的解き方 II, 柴垣和三雄, 金山靖夫 訳, みすず書房 1967.
- [22] J. Plücker. *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, Crelle’s Journal 1846. *Undergraduate algebraic geometry*, Cambridge Univ. Press 1988.
- [23] M. リード. 初等代数幾何学講義, 若林功 訳, 岩波書店 1991.
- [24] L. Schläfli. An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, and to derive such surfaces in species, in reference to the reality of the lines upon the surface, *Quart. J. of pure and applied Math.*, 2 (1858) 55–65, 110–120.
- [25] 高須鶴三郎. An elementary, purely projective and synthetic proof of the double six theorem of Schläfli, *東京物理学校雑誌* 521 (1935) 1–10. 英訳版 *Tohoku Math. J.* 44 (1938) 370–376.
- [26] C. Yamashita. An elementary, purely projective and synthetic proof and three others for the double six theorem of Schläfli, *Tohoku Math. J.* 44 (1938) 381–389.
- [27] C. Yamashita. An elementary and purely synthetic proof for the double six theorem of Schläfli, *Tohoku Math. J.* 5 (1954) 215–219.
- [28] B.L. ファン・デル・ヴェルデン. 代数幾何学入門, 前田博信 訳, シュプリンガーフェアラーク東京 1991.

琉球大学教育学部

E-mail address: hmaehara@edu.u-ryukyu.ac.jp(前原), hide@edu.u-ryukyu.ac.jp(徳重)