ランキングパタンの数え上げ

徳重典英 (琉球大学)

2010年7月31日 高知大学

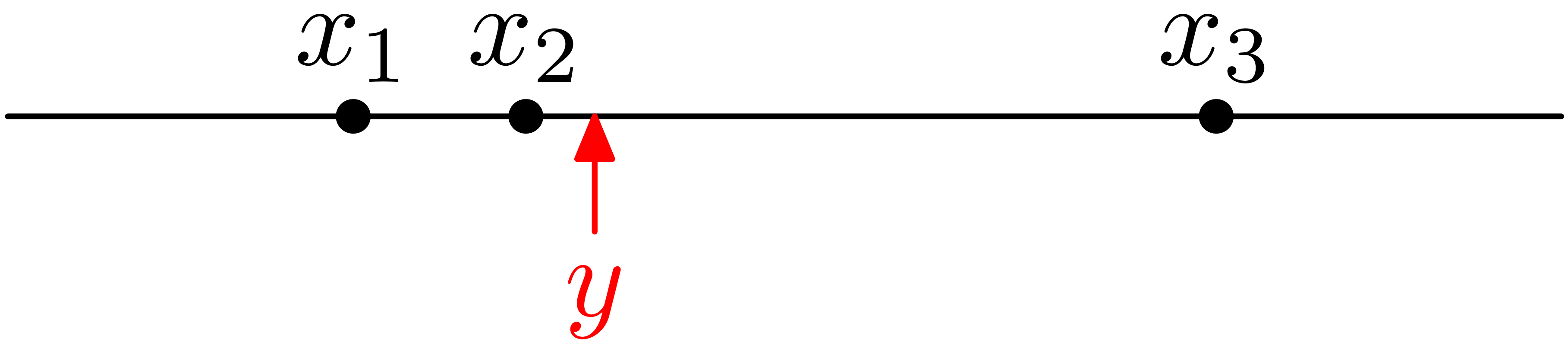
この発表は

竹村彰通(東大) 紙屋英彦(岡山大)

の両氏との共同研究に基づくものです。

定義と問題

理想点$y \in \mathbf{R}$をもつ個人がm個の選択肢$x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$ をyからの距離によって並べ替える。



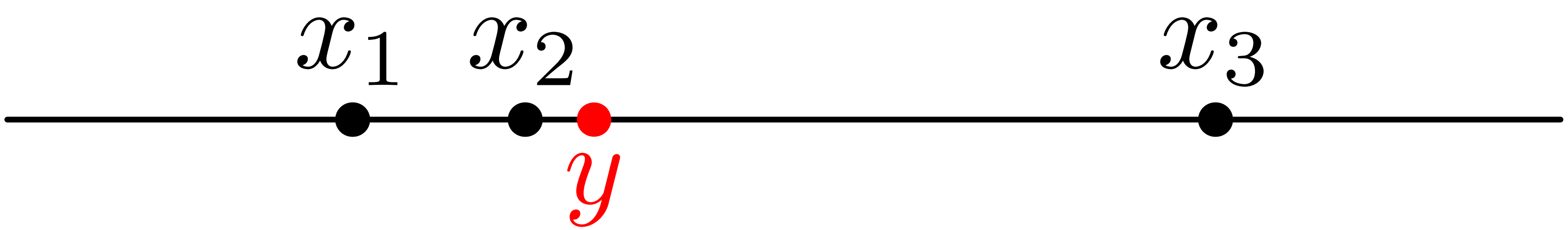
yのランキング $x_2 \succ x_1 \succ x_3$ or $(2, 1, 3)$.

入力：$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$ and $y \in \mathbf{R}$

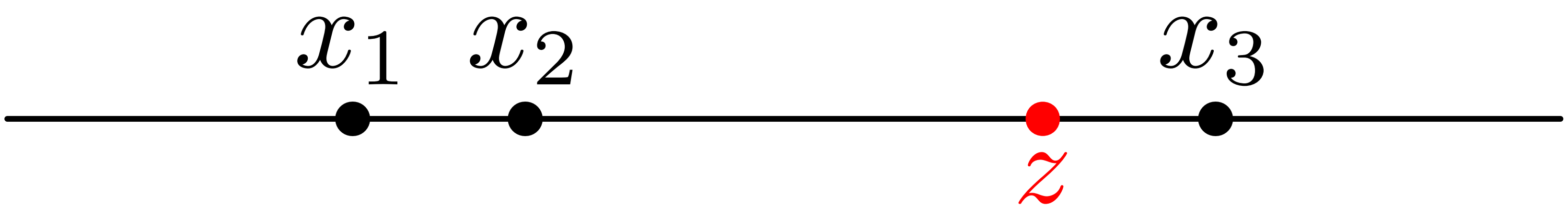
出力：ランキング $f(\mathbf{x}, y) := (i_1, \ldots, i_m)$

は次の条件で決まる：

$$|y - x_{i_1}| < |y - x_{i_2}| < \cdots < |y - x_{i_m}|.$$



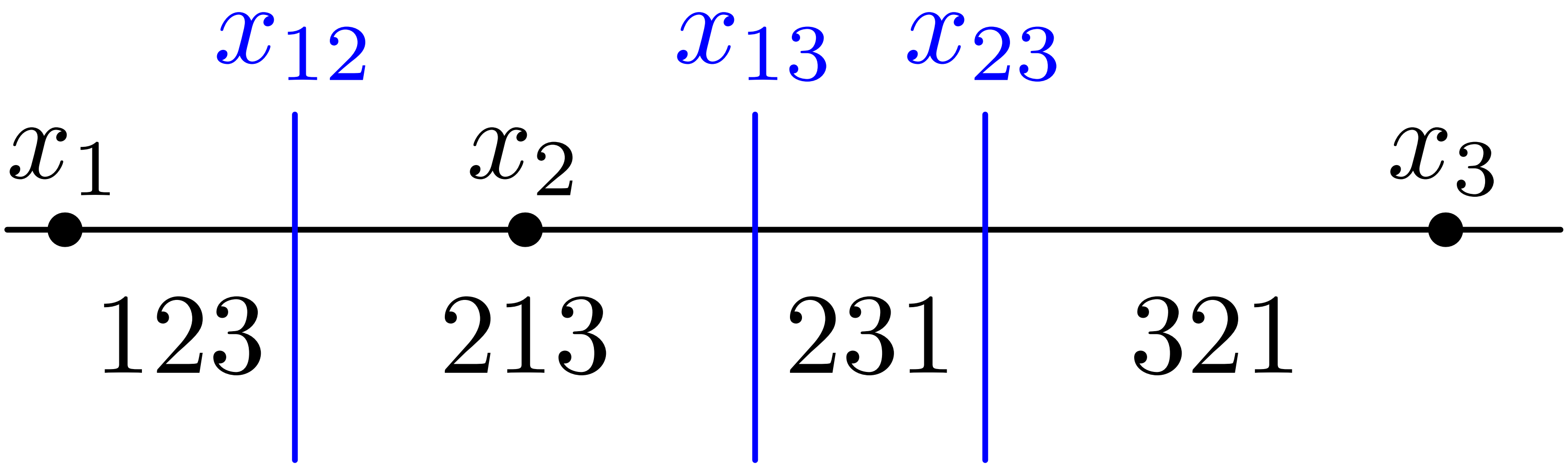
$$f(\mathbf{x}, y) = (2, 1, 3) = 213$$



$$f(\mathbf{x}, z) = (3, 2, 1) = 321$$

$\mathbf{x}$ のランキングパタン

$$F(\mathbf{x}) := \{f(\mathbf{x}, y) : y \in \mathbf{R}\}$$

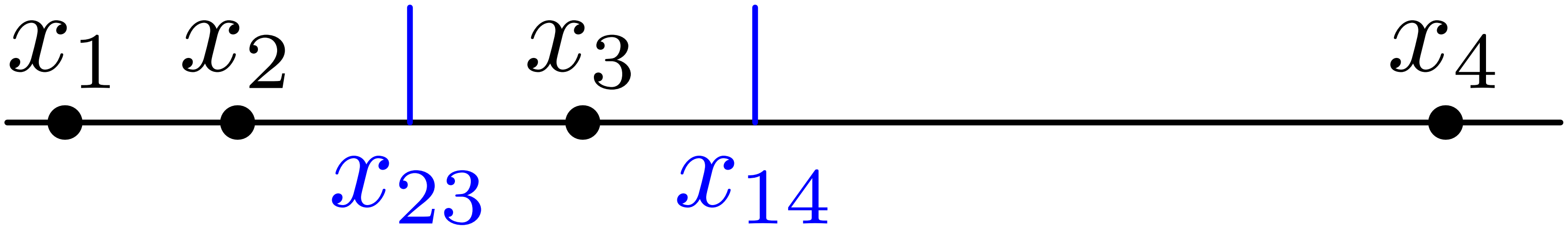


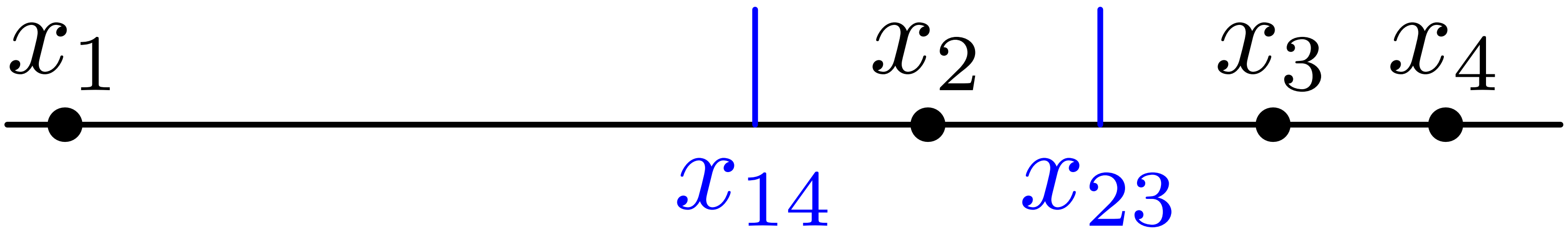
$$F(\mathbf{x}) = \{123, 213, 231, 321\}.$$

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ のランキングパタンが同じ

$\Longleftrightarrow$

中点集合 $\binom{\mathbf{x}}{2}$ と $\binom{\mathbf{x}'}{2}$ の並び方が同じ





$\mathcal{F}_m$をm個の選択肢から得られるランキングパタン全体とする。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_m = &\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m, \\ &\qquad x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}\end{aligned}$$

問題: ランキングパタンの総数を数えよ。

$$r(m) := |\mathcal{F}_m|.$$

主結果 (Kamiya-Takemura-T 2010^+)

ある正定数 c_1, c_2 が存在して

$$(c_1 m^2)^m < r(m) < (c_2 m^2)^m.$$

この問題は $\binom{m}{2}$ 個の中点 $x_{ij} = \frac{x_i + x_j}{2}$ たちの可能な並び方の総数を問うている。$\Longrightarrow$ 中面配置の導入

$\mathbf{R}^m$における以下の超平面たちを考える。

$$\{x_i = x_j : 1 \leq i < j \leq m\}$$

(m個の選択肢は全部異なる)

$$\{x_i + x_j = x_k + x_\ell : i, j, k, l \text{ all distinct}\}$$

(中点は全部異なる)

中面配置(the mid-hyperplane arrangement):

$$\mathcal{M}_m := (\text{上記の超平面全体})$$

$$\mathcal{M}_m = \{x_i = x_j\} \cup \{x_i + x_j = x_k + x_\ell\}.$$

$$|\mathcal{M}_m| \approx cm^4.$$

要点：$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^m$に対して

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が$\mathcal{M}_m$の同じ部屋

$\iff$

$\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ のランキングパタンが同じ、即ち

$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}')$.

復習

$$r(m) = \#\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}.$$

定理 (Kamiya-Orlik-Takemura-Terao 2005)

$$r(m) = \frac{(\mathcal{M}_m\text{の部屋の個数})}{m!}.$$

$r(3) = 1$, $r(4) = 2$, $r(5) = 12$, $r(6) = 168$, $r(7) = 4680$, $r(8) = 229386$, $r(9) = 18330206$.

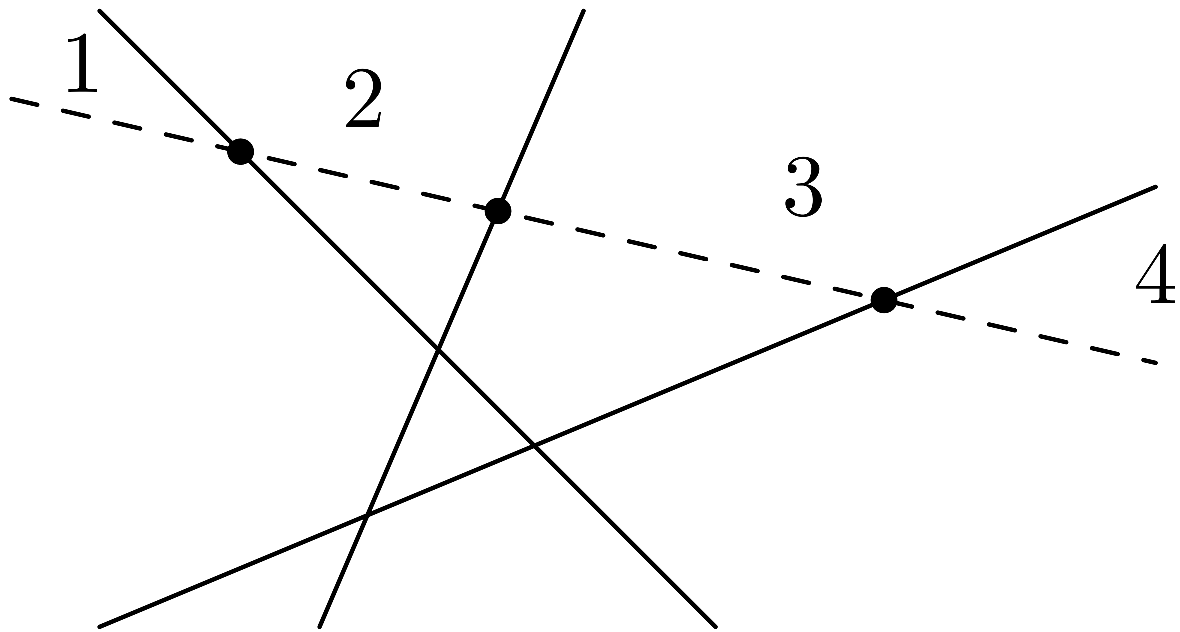
主結果の証明

$$(c_1 m^2)^m < r(m) < (c_2 m^2)^m.$$

上界の証明には、$\mathcal{M}_m$ の部屋数の上界を超平面の個数を使って評価する。

平面上にn本の直線をひく(一般の位置)。
n本目の直線は他の$n-1$本の直線と交わり、
新しくn個の領域を作る。領域の個数$g(n)$は

$$g(n) = g(n-1) + n.$$



$\mathbf{R}^d$ 内の n 枚の超平面：部屋の個数 $g_d(n)$

$$\begin{aligned} g_d(n) &= g_d(n-1) + g_{d-1}(n-1) \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{d} \leq (en/d)^d \end{aligned}$$

$\mathbf{R}^m$ 内の $\mathcal{M}_m$ の場合

$$d = m, \quad n = |\mathcal{M}_m| \approx cm^4$$

を KOTTの定理に代入して

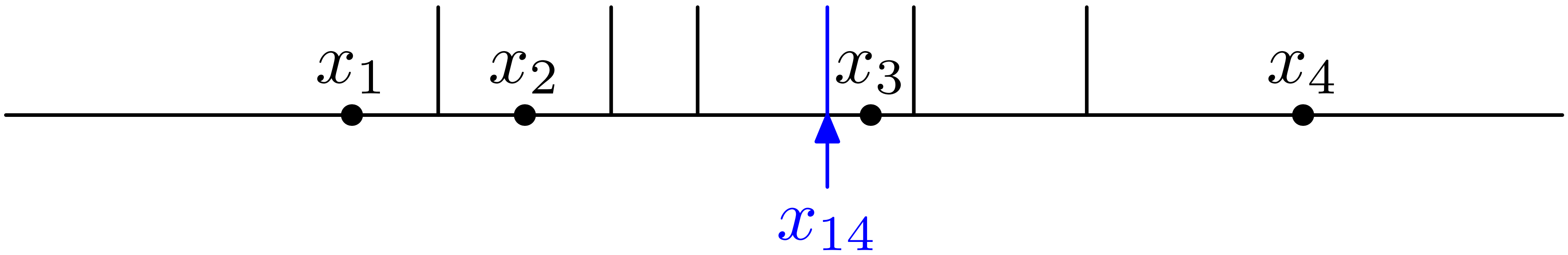
$$r(m) \leq \frac{g_m(|\mathcal{M}_m|)}{m!} \leq \frac{(ecm^4/m)^m}{m!} \approx (c_2m^2)^m.$$

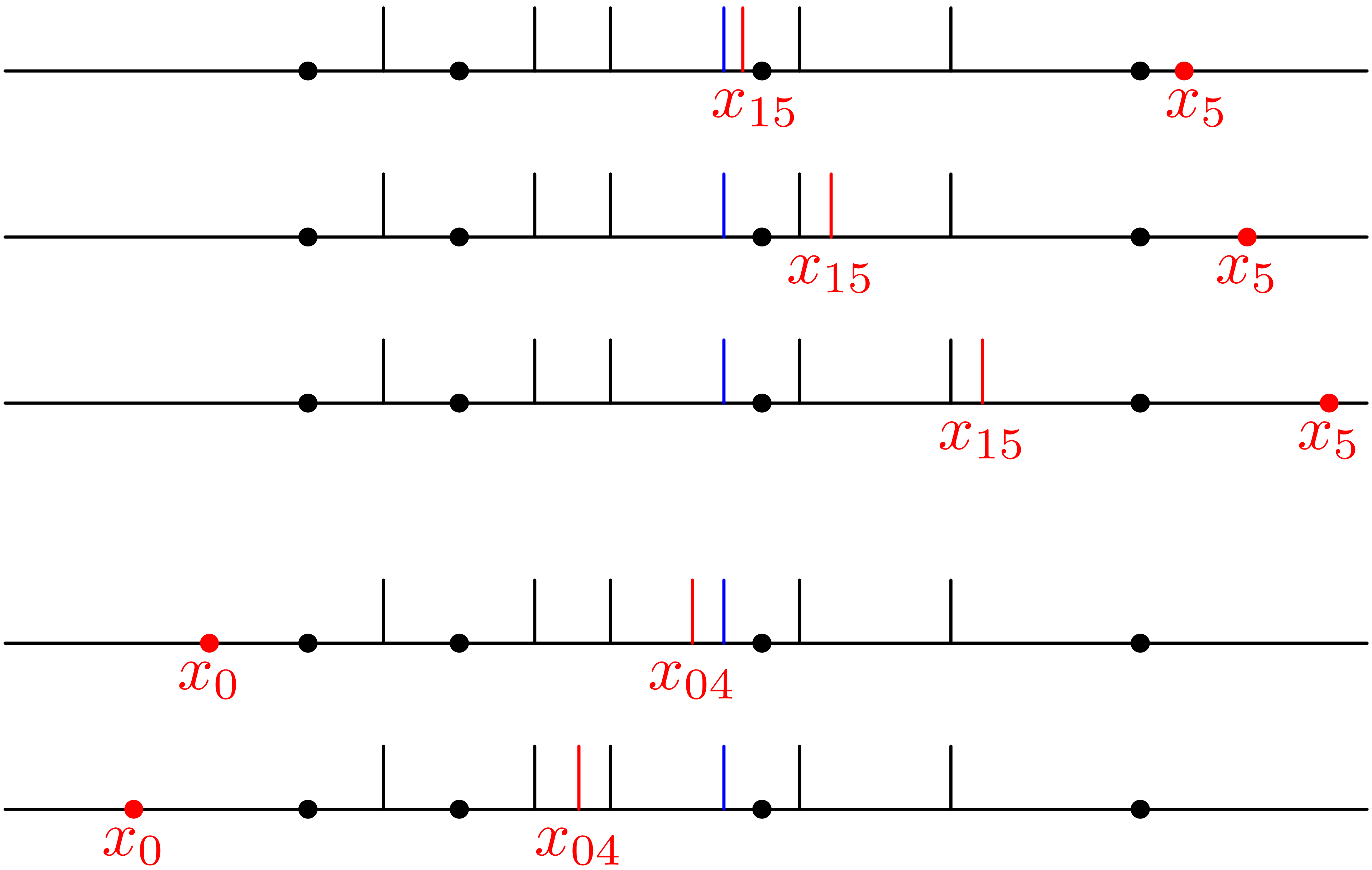
下界を示すため、

$$r(m+1) > cm^2 \times r(m),$$

がいえると、ここから次を得る：

$$r(m) > (c_1 m^2)^m.$$





x_{15}
x_5
x_{15}
x_5
x_{15}
x_5
x_0
x_{04}
x_0
x_{04}

$x_1 < \cdots < x_m$を固定する。x_{1m}より大きい中点が j 個あるとしよう。

$x_{m+1}(> x_m)$ を $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$に加えて $j+1$ 個以上の新しいランキングパタンを得る。

$x_0(< x_1)$ を $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$に加えて $\binom{m}{2} - j$ 個以上の新しいランキングパタンを得る。

平均すると、 x_0 又は x_{m+1}を加えて、$\frac{1}{2}\binom{m}{2}$個以上のランキングパタンを得る。

$$r(m+1) \geq \frac{1}{2}\binom{m}{2} \times r(m) \approx c_1 m^2 \times r(m).$$

注意 $(c_1m^2)^m < r(m) < (c_2m^2)^m.$

$$c_1 \approx 3/(4e^2) = 0.1, \quad c_2 \approx e^2/8 = 0.92.$$

問題 1. 上界、下界を改良せよ。

問題 2.

$$\text{極限 } \lim \frac{r(m)^{1/m}}{m^2} \text{ が存在するか?}$$

琉球大学教育学部では
数学教育講座の教員を
公募しています。

締め切り ８月３１日。