大きな有限の中に現れる構造をめぐって

徳重典英

概要

十分大きな世界にはあらかじめ指定された構造を見いだせるという類の主張を提示する。十分な大きさはどの程度のことなのか、それを知るためにどんな手法があるのかもあわせて紹介する。

1　ラムゼーとエルデシュ

六人の人が集まると、その中に互いに知り合いである三人か、互いに知り合いでない三人がいる。これを視覚的にとらえるため、六人に対応する六個の頂点を準備し、各頂点間をすべて線で結んだ図形を描こう。一般に、頂点間を結ぶ線のことを辺とよび、得られる図形を完全グラフという。冒頭の例の場合、六個の頂点と十五本の辺からなる完全グラフが得られる。さらに各辺に色を塗ろう。例えばA氏とB氏が互いに知り合いであれば対応する二頂点間の辺を赤で、知り合いでなければ青で塗る。こうしてすべての辺に色を塗ることで、二色で辺を塗り分けた六頂点完全グラフが得られる（図1）。このグラフの中には、赤い三角形か、青い三角形のどちらか（あるいは両方）が必ずある、というのが冒頭の言明の数学的な言い換えである。

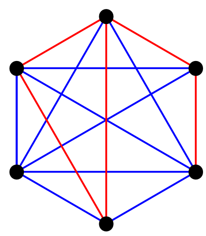

図1

実は五人の人が集まったとき、その中に互いに知り合いの三人か、知り合いでない三人がいるとは限らない。実際、五頂点完全グラフの辺を二色で塗って、赤の三角形も青の三角形もないようにできる（図2）。しかし六人以上の人が集まれば、その中には必ず知り合いの三人か、知り合いでない三人が見つかる。では、一般に

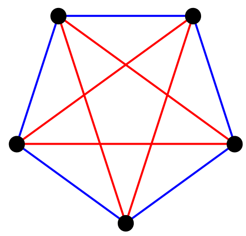

図2

『n人の人が集まったとき、その中には必ず互いに知り合いのa人か、知り合いでないb人が見つかる』

だろうか。これは全く自明なことではないが、答は「必ず見つかる」である。ただし条件があって、それはaとbを決めたときnを十分大きくとらなければならない。いったいnをどのくらい大きくとればよいのか？　そこでラムゼー数$R(a,b)$を導入しよう。これはnがこのラムゼー数以上であれば、『...』の言明が必ず成立し、nがこの数より小さいときには成立しないことがある、という性質で定義される。例えば$R(3,3)=6$である。また$R(4,4)=18$ということもわかっている。ラムゼーが見出したことはどんなaとbに対しても有限のラムゼー数$R(a,b)$が存在するということだった[1]。もっともラムゼーが実際に証明したことはこれよりもはるかに一般的なことで、上記のラムゼー数の存在はその特別に簡単な場合に過ぎない。それでもこのラムゼー数を正確に見積もることは、組合せ論(Combinatorics)とよばれる数学の分野において、重要で困難な問題とされている。

ラムゼーは経済学の業績やヴィトゲンシュタインとのかかわりがよく知られているが、もちろん数学者としても一流だった[1]。数学の業績が少ないのは、彼が二十七歳の誕生日の直前に病気で亡くなってしまったからだ。

ラムゼーの定理を独立に再発見し、それを数学の研究分野として確立したのはエルデシュである。彼のユニークな人生を知るには例えば[3]を読むとよい。定住せずに研究集会を渡り歩くような人だったから、彼の講演を聞いたことのある読者も少なくないだろう[2]。さて、ラムゼー数の決定がどれほど難しいかを物語る、エルデシュのジョークを紹介しよう[4]。「宇宙人がやってきて一年以内に$R(5,5)$を答えなければ地球を破壊すると言ったとしよう。世界中の頭脳と最速のコンピュータを結集すれば、なんとかなるかもしれない。しかし$R(6,6)$を求められたら、先制攻撃の準備を始めるしかない。」実際、今でも$R(5,5)$の正確な値はわかっていない。(43か、それより少し大きいくらいだろうという程度にはわかっている。)

正確な値は諦めるとしても、ラムゼー数は大雑把に見てどのくらいの数なのだろうか。例えばkが大きいとき$R(k,k)$について、この数は(細かいところを省くと、だいたい)$\sqrt{2}^k$より大きくて4^kより小さいということがわかっている。もしこの$\sqrt{2}$か4を別の数に置き換えることができれば、それは大ニュースとなるだろう。

これらの上界、下界をもう少し詳しく見てみよう。エル

デシュとセケレシュは

$$R(a+1,b+1) \le R(a+1,b) + R(a,b+1)$$

という漸化式が成り立つことに注目し、ここから $R(a+1,b+1)$ が $a+b$ 個のものから a 個を選ぶ場合の数（高校の教科書で ${}_{a+b}C_a$ と表示される数）以下であることを示した [5]。証明は易しい。特に $R(k+1,k+1) \le {}_{2k}C_k$ であるが、この右辺はkが大きいと $4^k/\sqrt{\pi k}$ に近い。

ラムゼー数の下界はどうか。n頂点完全グラフの辺をうまく二色で塗り分けて、赤い辺だけのk頂点完全グラフもないし、青い辺だけのk頂点完全グラフもないようにできれば $R(k,k) > n$ がわかる。しかしkがある程度大きくなると、そういうグラフの辺着色を見つけるのはとても難しい。そこで、そのような都合のよいグラフを具体的に構成せずに、しかし存在はすることを保証できないだろうか。そんな虫のよい話があるのか。

エルデシュは確率論を道具にこれをやってみせた [6]。n頂点完全グラフの辺をランダムに塗ってみよう。つまり各辺ごとにサイコロを振り、その丁半でその辺の色を赤か青に決めるのである。こうして得られたグラフでは、単色の（すなわち赤い辺のみ、あるいは青い辺のみの）k頂点完全グラフが生ずる確率を上から評価できる。その確率が1より小さければ、目標の二着色の存在がわかる（が、それがどんな着色なのか何の情報も得られない）。この議論から $R(k,k) \ge k\sqrt{2}^{k-1}/e$ であることを示すことができる。わからなかったらサイコロに聞け、というのは現代組合せ論の指針のひとつである。

複数の独立な事象があるとき、それらが同時に起こる確率は、各事象が起こる確率の積である。ロバースは、複数の事象が「かなり独立」であれば、それらが同時に起こる確率が正であることを示した [7]。これをロバースの局所補題という。スペンサーはこれを用いて $R(k,k) \ge k\sqrt{2}^{k+1}/e$ を得た [8]。これはエルデシュの結果を二倍だけ改善したにすぎないが、その改善にはほぼ三十年を要した。さらにそれから四十五年たった現在でもこれより本質的によい下界は知られていない。この問題の難しさの一端がうかがえる。

2 サイコロの威力

ここで少し脱線して、サイコロに聞くことが計算を効率化する実例をマトウシェクの魅力的な本 [9] から紹介しよう。コンピュータ上で処理される問題（それは数学に限らず、工学や経済学などさまざまな分野にある）は、行列を使って定式化されることが多い。したがって行列に関するあらゆる操作について、その高速化には意味がある。特に行列の積の計算は基本的な演算だから重要である。そこで行列の積の計算にかかる時間を、成分の積の回数で見積もってみよう。n次行列AとBが与えられたとき、その積を定義通りに計算すると成分の積の計算は n^3 回行われる。つまりこの計算には n^3 程度の時間がかかる。Aとn次元ベクト

ルｘの積は n^2 程度の時間で計算できる。いまｎが非常に大きくて、n^3 時間は実用上実行できないが、n^2 時間の処理は好きなだけ [3] 実行できると仮定しよう。この状況ではＡとＢの積を計算できない。ここでｎ次行列Ｃが与えられて、これはＡとＢの積を計算したものだという。本当にそうなのか検証したい。つまりＡとＢの積を計算せずに、その積がＣであるかどうか（高速に）確かめたい。

そんな魔法のようなことがサイコロを使ってできるのだ。まずｎ次元のランダムベクトルｘを作ろう。サイコロをふってその丁半に応じてベクトルｘの第１成分を０か１に決める。再びサイコロをふって第２成分を０か１に決める。このようにｎ回さいころをふってベクトルｘを決定する。次に ABx を計算する。もちろんこれはまず Bx を n^2 時間で計算し、その結果得られたベクトルを A にかけて n^2 時間の計算を行うのである。つまり ABx の計算は合計 $2n^2$ 時間で終わる。これで得られたベクトルをｙとしよう。最後に Cx を計算する。これも n^2 時間でできる。得られたベクトルをｚとする。

もしｙとｚを比べて、それが異なっていれば $AB \neq C$ が確定する。しかしｙとｚが一致した場合はもう少し微妙である。もちろん $AB = C$ であれば $y = z$ であるが、$AB \neq C$ であってもたまたま $ABx = Cx$ となってしまう「困った場合」があるからだ。ここが重要なところなのだが、よく検討するとこの困った場合が生じる確率は二分の一より小さいことがわかる（気になる人はマトウシェックの本を読んで下さい）。ｙとｚの計算は高速にできるから、ここまでの操作を十回繰り返しても（ただしその都度サイコロをふって新しいランダムベクトルを使う）たいして時間はかからない。十回ともｙとｚが一致したとしよう。それにもかかわらず $AB \neq C$ であった確率は $(1/2)^{10}$ より小さい。つまり 99.9% の確率で $AB = C$ であると確信できる。99.9% が不満ならば、満足するまでサイコロをふればよいのだ。

3 等差数列

自然数全体を二つに分割したとき、片方は任意の（有限）長さの等差数列を含むだろうか。（ここで等差数列の長さとは項数のことをいう。例えば $a, a+d, a+2d$ は長さ３の等差数列である。また公差ｄは０でないものとする。すなわちここでは a, a, a は等差数列とはみなさない。）ファン・デル・ヴェルデンはこれが正しいことを証明した [10]。実際もっと強いことが成り立つ。すなわち、与えられた正の整数 k, r に対して、ある整数Ｗが存在して、Ｗ以下の自然数をどのようにｒ色で塗り分けても、単色の（つまり同色で塗られた）長さｋの等差数列が見つかる。そのような最小のＷをファン・デル・ヴェルデン数とよび、$W(k, r)$ と表記しよう。例えば 12345678 の中には長さ３の単色等差数列がないから $W(3, 2) \geq 9$ がわかる。実は $W(3, 2) = 9$ である。さらに $W(3, 3) = 27$, $W(3, 4) = 76$ などが知られている。有限の $W(k, r)$ が存在することは、鳩の巣原理をｋと

rの二重帰納法と組み合わせて証明できる。その証明を思いつくのは難しいが、証明自体は短く理解するのは難しくない。しかしこの方法で得られる $W(k,r)$ の上界は非常に大きい[4]。

この上界がどれくらい大きいか説明するためにいくらか準備をしよう。まず関数fをn回適用して得られる関数を $f^{(n)}$ と書く。例えば $f^{(1)}(x)=f(x),\ f^{(2)}(x)=f(f(x))$,

$$f^{(3)}(x)=f(f(f(x))),\ldots$$

という具合だ。ここで $f_1(n)=2n$ と定義し、以下再帰的に $f_{i+1}(n)=f_i^{(n)}(1)$ と定める。すると $f_2(n)=2^n$,

$$f_3(n)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$$

ただし右辺は2をn個積み重ねた塔からなる。これらの関数には愛称があり、f_1,f_2,f_3 はそれぞれ、double, exponent, tower とよばれる。例えば、

$$f_3(4)=f_2^{(4)}(1)=f_2(f_2(f_2(f_2(1))))=2^{2^{2^{2}}}=2^{16}=65536$$

である。同様に $f_4(4)$ を計算してみると、この数は $f_3(65536)$ つまり2が65536個積み重なった塔である。f_4 をwowとよぶ。最後に $g(x)=f_x(x)$ とおく。この g をackermannという。さてファン・デル・ヴェルデン数の上界の話に戻ると、二重帰納法から得られる評価は $W(k,2)\le \mathrm{ackermann}(k)$ というものである。その後、シェラーはこの定理をkだけの帰納法で証明することに成功し、その結果 $W(k,2)\le \mathrm{wow}(k)$ の評価を得た[12]。さらにガワーズは後述する密度型定理のための深い数学的洞察から上界をさらに改善し[13]、例えば

$$W(k,2)\le 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}$$

を示した。一方、ファン・デル・ヴェルデン数の下界はだいたいkの指数関数のものしか知られておらず、依然として下界と上界の差は大きい[5]。

なお、シェラーは実際にはヘイルズ–ジュエットの定理[17]の証明を二重帰納法から（一重）帰納法に改善したのだった[6]。この定理は十分に次元の高い立方体の頂点をr色で塗ると、その中に単色の「組合せ的直線」が見つかることを保証する。組合せ的直線は等差数列を拡張した概念で、ヘイルズ–ジュエットの定理は特別な場合としてファン・デル・ヴェルデンの定理を含む。

ファン・デル・ヴェルデンの定理によれば、自然数をr色で塗るとある色の自然数たちの中に任意の長さの等差数列が見つかる。しかし、それがどの色なのかはわからない。エルデシュとトゥランは、それは最も頻繁に用いられた色であろうと考え、より精密に次のことを予想した。すなわち「任意の正の実数εと正の整数kに対して、nを十分大きくとれば、n以下の自然数からどの εn 個を取り出しても、その中に長さkの等差数列がある」というのだ[7]。この予想は正しいことがわかっており、密度型の主張とよば

れる。全体のεくらいの密度を持っている部分に探しているものが見つかることを主張するからだ。例えば $\varepsilon = 1/r$ の場合を考えると次のことがわかる。nが十分大きいとき、n以下の自然数をr色で塗ると、同色の n/r 個以上の自然数の中に長さkの等差数列がある。ファン・デル・ヴェルデンの定理ではどこに等差数列があるのかわからなかったが、密度型定理からは全体の $1/r$ を占める部分集合には必ず等差数列が入っているとわかるのだ。

この予想はまずkが3のとき、ロスによって解析的な方法で証明された[21, 22]。セメレディはこれとは全く異なる組合せ論的な方法でkが4の場合を証明し[23]、ついに一般の場合も解決した[24]。以来この結果はセメレディの定理として広く知られることとなった。ファーステンベルグはセメレディの定理にエルゴード理論を用いた新しい証明を与え[25]、さらにカツネルソンとともにヘイルズ–ジュエットの定理の密度版の証明にも成功した[26]。

この最後の密度型ヘイルズ–ジュエット定理はセメレディの結果を含む強力な結果であるが、長い間、エルゴード理論による証明しか知られていなかった。この定理に、新しく、より簡明な証明を与えたのがポリマス(D. H. J. Polymath)である[28]。これは数学者チームの名前で、名前の頭文字はDensity Hales–Jewettからとった洒落だろう。論文には誰がメンバーであるかは書いてないが、実際にはこのプロジェクトがはじまって完成するまでの様子はネット上に記録されておりだれでも見ることができる[8]。このような質の高い研究が、だれでも自由に参加できるネット上の公開の場で行われ、得られた成果が匿名で発表されたことは興味深い[9]。

4 証明の背後にあるもの

セメレディの定理は組合せ論のもっとも深い結果のひとつであり、実際の証明はそれなりに難しい。しかしグラフ理論的な証明は、少なくとも方針自体は比較的単純で、しかもその背後にある考え方がわかりやすい。それは「ランダムな構造は扱いやすい」ことがあり、「ある条件下では、現実（与えられたもの）をランダムな構造でうまく近似できる」ことに基づいている。この考え方はセメレディの定理の証明だけでなく、組合せ論の多くの場面で見られる重要なものだ。もちろんこの方針が適切に機能して意味のある結果を生み出すには、たいていの場合、多くの技術的困難を解決しなければならない。ここではそういう技術的な面は省いて、大筋で何が行われるのかを解説しよう。そこで次の主張（☆）を考える。これはロスの定理と同値なのだが、セメレディの定理の一番簡単な場合は、この主張であると思って差し支えない。

（☆）n以下の自然数の集合 $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ の部分集合Aが長さ3の等差数列を含まなければ、Aの要素の個数は「少ない。」

ただしここでの「少ない」の意味は、Aの要素の個数とnとの比$|A|/n$が（nを大きくしていくと）いくらでも0に近づくこと、と約束する。

これから紹介する考察はルジャとセメレディによるもの[32]で、問題をグラフの辺を数えることに帰着させる。n頂点のグラフとは、n個の頂点と、2頂点間を結ぶいくつかの辺からなる図形である。もしすべての2頂点間に辺をつければ、冒頭にあげた完全グラフとなり、その辺数は${}_nC_2 = n(n-1)/2$である。一般のグラフでは2頂点間に辺をつけてもつけなくてもよいので、その辺数は最大で${}_nC_2$、最小は0（まったく辺のないグラフ）である。n頂点グラフは辺数がn^2の定数倍程度であるとき「密な」グラフという。（☆）の条件をみたす部分集合Aからグラフを構成し、そのグラフの辺数が少ないこと、つまり密なグラフにはなれないことを示そう。これは次の二つのステップからなる。一つ目はグラフの構成である。

[補題1]（☆）の条件をみたすAから、頂点数がnの定数倍、辺数が$n|A|$の定数倍、さらにどの辺もちょうど一つの三角形に含まれるグラフGを構成できる。

二つ目のステップは補題1で構成したGが密なグラフになり得ないことを主張する。

[補題2] n頂点グラフのどの辺もちょうど一つの三角形に含まれるならば、その辺数mは「少ない。」すなわち、mとn^2の比m/n^2は（nを大きくしていくと）いくらでも0に近づく。

この二つの補題からAが小さいという（☆）の主張がしたがう。補題1のグラフGはAの情報から具体的に得られるもので、構成は容易である。証明の重点は補題2にあり、ここにランダム構造による近似が用いられる。

補題2の証明のために、まずランダムグラフを導入しよう。これはn頂点のグラフで、各頂点間に辺をつけるかどうかをサイコロで決めるのである。あるいは各頂点間ごとに、確率pで表の出るコインを投げ、表が出たら辺をつけ、裏が出たら辺をつけないことにする。こうして得られるグラフ（厳密にはこれは現実のグラフではなくて確率空間だが、いまここらへんを積極的に誤解しよう）はいろいろなことが簡単にわかる。例えばこのグラフには辺が$p \times {}_nC_2$本くらいあり、三角形は$p^3 \times {}_nC_3$個くらいあると期待できる。

さて補題1で得られるグラフGはランダムグラフではないが、実はある視点から見るとGの大部分をランダムグラフのように見なせることが知られている。この視点はセメレディの正則化補題[33]を用いて得られる。この正則化補題こそ、与えられたグラフをランダムグラフで近似するための装置であり、セメレディの最も重要な業績のひとつである。そもそもそのような近似が可能であることが驚きであるが、この近似が実質的な意味を持つには、近似の精度を量的にきちんと把握しなければならない。正則化補題はそういった細部も込みの装置である。

補題2の証明の概略は次の通りである。背理法で証明するため、グラフGのどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるが、Gは密なグラフであると仮定する。このグラフに正則化補題を適用すると、Gの大部分をランダムグラフとみなせるようになる。ただしその際、そのような視点を獲得するのに邪魔な辺を削除する必要があるが、その本数は無視できるほど少ないので、削除後にも三角形が残る。ランダムグラフで近似できることを使って、残った三角形の個数を評価すると、それはn^3の定数倍程度であることがわかる。しかしGのどの辺もちょうど一つの三角形に含まれるという仮定からは、三角形の個数は最大でもn^2の定数倍程度でなければならない[10]。この矛盾はGが密なグラフであるという（間違った）仮定から生じたのであり、したがってGの辺数は少ない。以上が補題2の証明の粗筋である。

主張（☆）では長さ3の等差数列を扱ったが、長さkの等差数列の場合も同様の方法が適用できる。長さ3のときは三角形の個数に注目したが、長さ4のときは四面体、一般には$k-1$次元単体を利用する。それに応じてグラフを拡張した概念であるハイパーグラフの上で正則化（ランダムハイパーグラフへの近似）をおこなう。方針は同じでも技術的にはずっと難しくなるので、ガワーズ[34]やレードルら[35, 36]によってこの一般論が完成したのはルジャとセメレディのアイデアが得られてから約三十年後のことだった。そしてこれはまた新しい時代の出発点でもあった。ハイパーグラフを正則化する手法を手に入れたことで、これを利用した成果が次々と生み出されている。

5 未解決問題

エルデシュは自然数全体の部分集合

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$$

で、各要素の逆数の和$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots$が発散する（いくらでも大きくなる）場合には、この集合Aの中に任意の長さの等差数列を見いだせるだろうと予想した[11]。この予想は現在も未解決であるが、ひとつの重要な場合について予想が正しいことがわかっている。それはAが素数の集合

$$A=\{2,3,5,7,11,13,\dots\}$$

の場合である。素数の逆数の和は発散するが、グリーンとタオは、素数のみからなる等差数列でいくらでも長いものがあることを証明した[38]。これはセメレディの定理を土台のひとつにしているが、それを超える画期的な成果とみなされている[12]。

等差数列は和が定まれば定義できるから、自然数の集合でなくても一般にアーベル群（足し算がうまくできる数学的構造）において等差数列に関する問題を考えることができる。実際、有限アーベル群を指定したとき、その部分集合で長さkの等差数列を含まないものの大きさを見積もる研究がたくさんある。特に有限体上のベクトル空間の場合

に、最近大きな進展があったのでそれを紹介しよう。集合 $F=\{0,1,2\}$ の要素 a,b に対してその和を「$a+b$ を3で割った余り」として定義しよう。例えば $1+2=0,\ 2+2=1$ 等とする。このFを三元体という。F上のn次元ベクトル空間Vは 3^n 個の要素からなる。いまVの部分集合Aの中に長さ3の等差数列（つまり3個のベクトルで $a, a+d, a+2d$ の形に表せるもの、ただしdは零ベクトルではない）がないとしよう。このときAの要素の個数はもちろん 3^n 以下であるが、エレンバーグとガイズワイトは 2.76^n 以下であることを示した [39]。証明は線形代数を知っていれば容易に理解できるもの（多項式の手法ともいう）だが、斬新なアイデアが使われている。そのアイデアのもとはクロット、レブ、パッフ [40] の論文にあり、後にタオ [41] はこれをスライスランクという概念を導入して整理した。スライスランクを用いた手法は現在も活発に研究されているが[13]、基本的なことで未解決な問題も多い。例えば、p元体上のn次元ベクトル空間の部分集合で長さ4の等差数列を含まないものは、どの程度まで大きくなれるだろうか。そのような部分集合の要素の個数が c^n 以下であるかどうか（ただしcはpより小さい正の定数）わかっていない。

この有限体上のベクトル空間における等差数列を含まない部分集合の話題（これをキャップセット問題という）は、数論からの興味だけでなく、理論計算機分野からの動機もあった。すなわち二つのn次行列の積はどれくらい速く計算できるか、ということに関連があるのだ。行列の積を定義通りに計算すれば n^3 程度の時間がかかるが、計算を工夫することでこれを高速化できる。現時点での最速記録は $n^{2.37}$ 程度である。これを限界まで推し進めて n^{ω} 時間で行列の積が計算できたとしよう。ωは2と2.37の間にあるのだが、真の値は何だろうか。実はもしωが2であれば、それをキャップセット問題を利用して証明できる可能性が指摘されていた。残念ながら、キャップセット問題への理解が進んだことでその方針では $\omega=2$ を証明するのは無理だとわかった [45]。結局ωは2なのか、2より真に大きいのかは現時点でも未解決である。

注

1 ケンブリッジ大学で同僚だったリトルウッドは、[2] の中で彼らが審査した博士論文に関する面白いエピソードを紹介しながら、ラムゼーの人柄について次のように書いている。『彼は自分自身および他人に対する高度の良心を内面に秘めており、ただ表面は横柄でいかにも「キングスカレッジ出身でござい」というインテリ風な態度で隠蔽していて人に悟らせなかった。』

2 私は一度だけプラハの小さな食堂で少し会話したことがある。どこから来たか尋ねられたので日本からだと答えたら「ボクハ、イダイナ、スウガクシャデアル」と言うので、ああその通りですよねというほかなかった。これは角谷が教えてくれたんだ、とのこと。雑談はそれだけであとはずっと数学の話だった。食事が終わる頃、隣にいたネシュトリルが「午後はどうしますか、王宮を案内しましょうか」と提案すると、「それは次の機会にしよう。もしまだ生きていればね」と返していた。まだ生きていれば、というのは彼の常套句であまり気にとめなかったが、次の機会はなかったかもしれない。

3 もちろん n に依存しない定数回だけ、という意味である。

4 もっとも専門家によれば「アッカーマン関数なんて、巨大数論においては序盤で現れる雑魚敵みたいな代物」らしい。[11] の木原貴行氏の項を見よ。

5 グラハムは $W(k,2)\le 2^{k^2}$ と予想し、これに千ドルの賞金を懸けている [14]。グラハム数については [15] を見よ。

6 シェラーの証明をアロンが再構成したもの（たった2ページ！）が [16] にある。

7 [18] には $k=3$ の場合の予想が書いてあり、[19] には一般の場合についても予想していたとある。しかし Soifer[20] は 1960 年前後の Erdős の講演記録を詳細に検討して、この予想が Erdős の中で固まったのは 1950 年代の終わりの方であろうと結論づけている。Soifer の推論は文献記録に基づいており、Erdős の記憶より正しい可能性もあるだろう。

8 [29] から Polymath1 をたどるとよい。

[9] ポリマスが生まれた経緯や、このプロジェクトのもつ多様な側面については [30, 31] に詳しい。

[10] なぜなら、辺の本数は三角形の個数のちょうど三倍で、それは高々 ${}_nC_2$ 本だから。

[11] この予想は例えば [19] に書いてあり、そこではこの予想の解決に三千ドルの賞金をつけている。予想自体は、それよりずっと前からあり、エルデシュ–トゥランの予想とよぶ人もいる。この予想の歴史的経緯については [37] の 35 章を見よ。なお、多くの論文でこの予想の出典を [18] としているが、そこにこの予想は書かれていない。

[12] セメレディの定理には複数の異なる証明がある。グリーンとタオはそれらの証明の背後にある共通した考え方を抽象化して抽出し、拡張した。彼らの証明を日本語で解説する本が近く出版されるらしい。大いに期待したい。

[13] 例えば [42, 43, 44] など。

参考文献

[1] F. P. Ramsey. On a Problem of Formal Logic. Proc. London Math. Soc. (2) 30 (1929) 264–286.

[2] B. ボロバシュ 編, 金光滋 訳. リトルウッドの数学スクランブル. (p.207) 近代科学社 1990.

[3] P. Hoffman. The man who loved only numbers. The story of Paul Erdős and the search for mathematical truth. Hyperion Books, New York, 1998.

[4] R. L. Graham, J. H. Spencer. Ramsey Theory. Scientific American, July 1990, 112–117.

[5] P. Erdős, G. Szekeres. A Combinatorial Problem in Geometry. Composito Math, 2 (1935) 464–470.

[6] P. Erdős. Some Remarks on the Theory of Graphs. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 292–294.

[7] P. Erdős, L. Lovász. Problems and Results on 3-Chromatic Hypergraphs and Some Related Questions. Infinite and Finite Sets. North Holland, 609–628, 1975.

[8] J. Spencer. Ramsey's theorem—a new lower bound. J. Combinatorial Theory A 18 (1975) 108-115.

[9] J. Matoušek. Thirty-three miniatures. Mathematical and algorithmic applications of linear algebra. Student Mathematical Library, 53. American Mathematical Society, 2010. (kam.mff.cuni.cz/~matousek/la-ams.html から preliminary version を入手可能。)

[10] B. L. van der Waerden. Beweis einer Bandetschen Vermutung. Nieuw Archief voor Wiskunde 15 (1928) 212–216.

[11] 数学セミナー 2019 年 7 月号 (vol.58, no.7, 693) p. 89.

[12] S. Shelah. Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers. J. Amer. Math. Soc. 1 (1988) 683–697.

[13] W. T. Gowers. Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma. Geom. Funct. Anal. 7 (1997), 322–337.

[14] R. Graham. Some of my favorite problems in Ramsey theory. Combinatorial number theory, 229–236, de Gruyter, Berlin, 2007. (同じものが Integers: Electronic journal of combinatorial nummber theory 7(2) (2007), #A15 からも入手可能)

[15] 岡本吉央. グラハム数, ラムゼー理論, そして, 役に立たない定数時間アルゴリズム. 数学セミナー 2019 年 7 月号 (vol.58, no.7, 693) 18–21.

[16] A. Nilli. Shelah's proof of the Hales–Jewett theorem. Mathematics of Ramsey theory, 150–151, Algorithms Combin., 5, Springer, Berlin, 1990.

[17] A. W. Hales, R. I. Jewett. Regularity and positional games. Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963) 222–229.

[18] P. Erdős, P. Turán. On Some Sequences of Integers. J. London Math. Soc. 11 (1936) 261–264.

[19] P. Erdős. On the combinatorial problems which I would most like to see solved. Combinatorica 1 (1981) 25–42.

[20] A. Soifer. Ramsey theory before Ramsey, prehistory and early history: an essay in 13 parts. Ramsey theory, 1–26, Progr. Math., 285, Birkhäuser/Springer, New York, 2011.

[21] K. Roth. Sur quelques ensembles d'entiers. C. R. Acad. Sci. Paris 234 (1952) 388–390.

[22] K. F. Roth. On certain sets of integers. J. London Math. Soc. 28 (1953) 104–109.

[23] E. Szemerédi. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 20 (1969) 89–104.

[24] E. Szemerédi. *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[25] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256.

[26] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Analyse Math. **34** (1978), 275–291 (1979).

[27] D. H. J. Polymath. A new proof of the density Hales-Jewett theorem. Ann. of Math. (2) 175 (2012) 1283–1327.

[28] D. H. J. Polymath. Density Hales-Jewett and Moser numbers. An irregular mind, 689–753, Bolyai Soc. Math. Stud., 21, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010.

[29] wiki for polymath project. `michaelnielsen.org/polymath1/index.php`

[30] W. T. Gowers. Polymath and the density Hales-Jewett theorem. An irregular mind, 659–687, Bolyai Soc. Math. Stud., 21, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010.

[31] M. A. Nielsen. Introduction to the Polymath project and "Density Hales-Jewett and Moser numbers". An irregular mind, 651–657, Bolyai Soc. Math. Stud., 21, Já nos Bolyai Math. Soc., Budapest, 2010.

[32] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi. Triple systems with no six points carrying three triangles. Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq., Keszthely, 1976), Vol. II, 939–945,

[33] E. Szemerédi. *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.

[34] W. T. Gowers. Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem. Ann. of Math. (2) 166 (2007), 897–946.

[35] V. Rödl, J. Skokan. Applications of the regularity lemma for k-uniform hypergraphs. Random Structures Algorithms **25** (2004), 1–42.

[36] B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht. The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs. Random Structures Algorithms 28 (2006), no. 2, 113–179.

[37] A. Soifer. The mathematical coloring book. Mathematics of coloring and the colorful life of its creators. Springer, New York, 2009.

[38] B. Green, T.Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Ann. of Math. (2) 167 (2008), 481–547.

[39] J. S. Ellenberg, D. Gijswijt. On large subsets of $\mathbf{F}_q^n$ with no three-term arithmetic progression. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 339–343.

[40] E. Croot, V. F. Lev, P. P. Pach. Progression-free sets in n4 are exponentially small. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 331–337.

[41] T. Tao. A symmetric formulation of the Croot–Lev–Pach–Ellenberg–Gijswijt capset bound. blog post, 2016, http://terrytao.wordpress.com/2016/05/18/a.

[42] L. Sauermann. On the size of subsets of $\mathbb{F}_p^n$ without p distinct elements summing to zero. preprint, arXiv:1904.09560v2, 2019.

[43] E. Naslund. Monochromatic equilateral triangles in the unit distance graph. preprint, arXiv:1909.09856v1, 2019

[44] M. Mimura, N. Tokushige. Avoiding a shape, and the slice rank method for a system of equations. preprint, arXiv:1909.10509v1, 2019.

[45] J. Blasiak, T. Church, H. Cohn, J. A. Grochow, E. Naslund, W. F. Sawin, C. Umans. On cap sets and the group-theoretic approach to matrix multiplication. Discrete Anal. 2017, Paper No. 3, 27 pp.