セメレディ正則化補題 — その拡張と応用

徳重典英　(琉球大学教育学部)

ABSTRACT. セメレディの正則化補題とは何か、どのように使われるのか？それをハイパーグラフ上に拡張するにはどうするのか、その結果どんなことが得られるのか？これらについて概観する。

1. はじめに

本稿は正則化補題 (定理 1) およびそのハイパーグラフへの拡張と応用に関する簡単な要約である。Szemerédi がグラフを正則化するということ ([32]) を考えてからほぼ 30 年が過ぎた。グラフの正則化補題に関しては既に優れた概説 ([17, 19, 20] 等) があり、多くの応用例がグラフ理論、加法的数論、計算機科学の理論基盤等において知られている。

正則化補題をハイパーグラフに拡張することへの本質的な第一歩は Frankl と Rödl[3] による。彼らが 3 グラフの正則化補題を得たのは 90 年代の初めだった。これを一般のハイパーグラフに拡張することは技術的な困難などにより難航したが、最近になって大きく進展し、ほぼ同時期に独立に二つのグループによって達成された。ひとつは Gowers[10, 11]、もうひとつは Rödl らのグループである。前者の流れからは Green と Tao [12, 13, 33, 34] が精力的に正則化補題の拡張、応用について研究を展開している。本稿では後者の流れに沿ってハイパーグラフ正則化補題について解説する。

次節以降で詳説するが、正則化補題は数え上げ補題と対をなす。時系列に沿って述べると、まず Kohayakawa, Rödl, Skokan[18] は「密に正則な」ハイパーグラフにおける数え上げ補題 (定理 7) を得た。k グラフの正則化補題にはいくつかの定式化があるが、そのひとつは Rödl と Skokan [26] によるもの (定理 9) である。これに対応する「疎に正則な」ハイパーグラフの数え上げ補題 (定理 10) は Nagle, Rödl, Schacht[21] によって得られた。Rödl と Skokan[27] はこれらの結果を極値集合論の問題 (定理 6) に応用することで、Szemerédi の等差数列に関する結果 (定理 5) に別証明を与えた。また Rödl と Schacht[23] は以上の流れを整理しつつ、さらにある意味で強い形の正則化補題 (定理 8) を得た。これは密な数え上げ補題 (定理 7) に対応している。

2 節ではグラフの正則化補題およびその使い方について簡単に復習する。3 節ではハイパーグラフの分割構造および正則化補題について主に [21, 23, 26] の定式化に従って解説する。4 節では 3 節の結果の応用例を紹介する。

2. 原型：グラフの場合

正則化補題は、グラフを「正則化」する機械である。この機械は入力としてグラフを受取り、「よい分割構造」を出力する。その分割構造上で、もとのグラフは要求精度の正則性を持つ。正則化されたグラフはあたかもランダムグラフの様に振舞うので、例えばクリークの数を容易に数えることができる。標語的に言えば、正則化とは「与えられたグラフがランダムグラフの様に見える見方 (＝よい分割構造) を探し出すこと」である。

グラフ G の「分割構造」は単に頂点集合の分割

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_t$$

である。実数 $\epsilon > 0$ に対してペア V_i, V_j が ϵ 正則とは、任意の $V_i' \subset V_i$ と $V_j' \subset V_j$ に対して $|V_i'| > \epsilon |V_i|$ かつ $|V_j'| > \epsilon |V_j|$ なら

$$|d(V_i', V_j') - d(V_i, V_j)| < \epsilon \tag{1}$$

が成立つことである。ただし

$$d(A, B) = \frac{e(A, B)}{|A||B|}$$

と定め、これをペア (A, B) の密度と呼ぶ。(1) が $|d(V_i', V_j') - d| < \epsilon$ と置き換えられるときはペア V_i, V_j は (ϵ, d) 正則であるという。Szemerédi の正則化補題を述べよう。

定理 1 ([32])**.** 任意の $\epsilon > 0$ と $t_0 \in \mathbb{N}$ に対して、$N_0 = N_0(\epsilon, t_0)$ と $T_0 = T_0(\epsilon, t_0)$ が存在して、$n \geq N_0$ ならば任意の n 点グラフ G は「よい」分割

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_t$$

を持つ。即ち、以下の三つが満たされる。

(1) $t_0 \leq t \leq T_0$,
(2) $|V_1| \leq \cdots \leq |V_t| \leq |V_1| + 1$,
(3) 高々ϵt^2 組の例外ペアを除いて、V_i, V_j $(1 \leq i < j \leq t)$ は ϵ 正則。

この補題はグラフ理論や数論などにたくさんの応用がある。手軽な応用例のひとつを見よう。次の結果は Ruzsa と Szemerédi による。

定理 2 ([29])**.** n 点グラフ G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるならば、$|G| = o(n^2)$ である。

Proof. G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるのに $|G| \geq cn^2$ であったとしよう。ここで定数 d, ϵ, t_0 を

$$c \gg d \gg \epsilon \gg \tfrac{1}{t_0}$$

となるように選ぶ。d はいわゆる sparseness threshold である。G を正則化し、分割

$$V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_t \quad (t_0 \leq t \leq T_0)$$

を得る。ここから以下に該当する辺を全部除去する。

(1) 非正則なペア V_i, V_j 間の辺。これは高々$\epsilon t^2(n/t)^2$ 本。
(2) 密度が d 未満の疎なペア V_i, V_j 間の辺。これは高々$\binom{t}{2}d(n/t)^2$ 本。
(3) 各 V_i の内部の辺。これは高々$t(n/t)^2$ 本。

除去した辺は全部で高々dn^2 程度である。

もともと cn^2 個の三角形があり、辺の除去でせいぜい dn^2 個程度の三角形が壊れた。$c \gg d$ だったからまだ三角形が残っている。例えば V_1, V_2, V_3 間に三角形があるとしよう。このとき次の数え上げ補題により実はここに $\Omega(n^3)$ 個の三角形がある。しかし G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるから G 内の三角形の個数は $O(n^2)$ のはずで、矛盾が生じた。 □

三部グラフ G の部集合を $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, $|V_1| = |V_2| = |V_3| = n$ とし、V_i, V_j で誘導される二部グラフを G_{ij} とかく。次の事実は正則性の定義から直ちに従う。

事実 3 (数え上げ補題)**.** 任意の $\gamma > 0$ と $d > 0$ についてある $\epsilon > 0$ が存在し、G_{ij} $(1 \le i < j \le 3)$ が全部 (ϵ, d) 正則ならば G には $(1 \pm \gamma)d^3n^3$ 個の三角形がある。

Proof. $d \gg \epsilon$ とする。まず G_{12} の典型的な点 x の次数は $\deg(x) = (d \pm \epsilon)n$ を満たすことを見よう。このために次数の低い点たちを $V_1^- = \{x \in V_1 : \deg(x) < (d-\epsilon)n\}$ とおくと、$d(V_1^-, V_2) = \frac{e(V_1^-, V_2)}{|V_1^-||V_2|} < d - \epsilon$ であるが、G_{12} は (ϵ, d) 正則だから $|V_1^-| < \epsilon n$ が従う。次数の高い点についても同様だから、V_1 の点は高々$(1-2\epsilon)n$ 個を除いて次数は $(d \pm \epsilon)n$ である。G_{13} についても同じである。結局 V_1 の典型的な点 x は、その近傍 $N_i = N(x) \cap V_i$ $(i = 2, 3)$ について $|N_i| = (d \pm \epsilon)n \gg \epsilon n$ を満たす。G_{23} も (ϵ, d) 正則だから $d(N_2, N_3) = \frac{e(N_2, N_3)}{|N_2||N_3|} = d \pm \epsilon$ より $e(N_2, N_3) = (d \pm \epsilon)^3 n^2$ が従う。つまり x を含む三角形の個数は $(d \pm \epsilon)^3 n^2$ である。典型的な $x \in V_1$ の個数は少なくとも $(1 - 4\epsilon)n$ であるから、$\gamma \gg \epsilon$ ととっておけば、G 内の三角形の総数は $(1 \pm \gamma)d^3n^3$ である。 □

定理 2 の証明は正則化を利用する手法の典型例で次の手順に従っている。
(1) 定数をうまく選ぶ。
(2) 正則化補題を用いて正則化する。
(3) 邪魔な辺を除去する。即ち、非正則なペア間の辺、疎なペア間の辺、V_i 内部の辺を捨てる。
(4) 除去した辺が無視できるほど少ないことを言う。
(5) 数え上げ補題を用いてクリークを数える。

同様の手順に沿って証明できる結果はたくさんある。例えば Nathanson の本 (GTM165) には Balog–Szemerédi の定理 (多次元等差数列に関する Freiman の定理の密度版) の証明がわかりやすく解説されている。

定理 2 はそもそも Roth の定理に簡単な別証明を与える道具だった。ここで

$$r_k(n) = \max\{|A| : A \subset [n] : A \text{ は長さ } k \text{ の等差数列を含まない }\}$$

とおく。Roth は Erdős と Turán の予想を解いて、次を示した。

定理 4 ([28])**.** $r_3(n) = o(n)$.

Proof. $A \subset [n]$ は長さ 3 の等差数列を含まないとする。$V(G) = [6n]$ とし、任意の $i \in [n]$ と $a \in A$ に三角形 $T(i,a) = \{i, i+a+n, i+2a+3n\}$ を対応させる。つまりグラフ G を $G = \bigcup\{\binom{T(i,a)}{2} : i \in [n], a \in A\}$ で定義する。もし G のどの辺もちょうどひとつの三角形に含まれるならば、G の辺数は $3n|A|$ であり、一方これは定理 2 から $o(n^2)$ なので $|A| = o(n)$ が従う。

さて三つの三角形 $T(i,a), T(i',a'), T(i'',a'')$ から一辺ずつ取り出してできる三角形が G 内にあるとしよう。例えばその 3 辺が $\{i, i+a+n\}$, $\{i'+a'+n, i'+2a'+3n\}$, $\{i'', i''+2a''+3n\}$ であるとする。このとき $i = i'', i+a+n = i'+a'+n, i'+2a'+3n = i''+2a''+3n$ であるが、ここから $a + a' = 2a''$, 即ち A 内に長さ 3 の等差数列が見つかって矛盾である。 □

Szemerédi は $r_4(n) = o(n)$ を示した後、ついに次の結果の証明に成功した。

定理 5 ([31])**.** 任意の整数 $k \geq 3$ について $r_k(n) = o(n)$.

この結果は後に Furstenberg[4] と Gowers[9] によっても証明された。一方、定理 2 を k グラフについて拡張できればそこから定理 5 は容易に従う。対応する結果を述べるため、クリークを定義する。頂点数 ℓ の完全 k グラフ、即ち $\binom{[\ell]}{k}$ と同型な k 点部分集合族をクリークとよび、K_ℓ^k と表記する。例えば K_3^2 は (グラフにおける) 三角形である。Rödl と Skokan は [1] で提起された予想を肯定的に解決し、次の結果を得た。

定理 6 ([27])**.** n 点 k グラフ $\mathcal{H}$ のどの辺もちょうどひとつのクリーク K_{k+1}^k に含まれるならば、$|\mathcal{H}| = o(n^k)$ である。

このようにハイパーグラフの枠内で $r_k(n) = o(n)$ を証明できる。上の定理の証明には、k グラフにおける正則化補題 (定理 9) と数え上げ補題 (定理 10) が用いられる。なお、4.1 節では定理 6 のその他の応用例をみる。

3. ハイパーグラフへの拡張

3.1. **素朴な拡張の問題点.** 3 グラフ $\mathcal{H}$ における ϵ 正則を (1) にならって次のように定義してみよう。頂点集合を $V(\mathcal{H}) = V_1 \cup \cdots \cup V_t$ と分割する。三組 (V_i, V_j, V_k) が ϵ 正則とは、任意の $V_i' \subset V_i$, $V_j' \subset V_j$, $V_k' \subset V_k$ に対して $|V_i'| > \epsilon|V_i|$, $|V_j'| > \epsilon|V_j|$, $|V_k'| > \epsilon|V_k|$ なら

$$|d(V_i', V_j', V_k') - d(V_i, V_j, V_k)| < \epsilon$$

が成立つことである。ただし

$$d(A,B,C) = \frac{e(A,B,C)}{|A||B||C|}$$

で密度を定める。この定義を採用して対応する 3 グラフの正則化補題を証明できる。しかし次の例は数え上げ補題が成立しないことを示している。

例 1. 3 グラフ $\mathcal{H}$ を 4 部グラフとして構成しよう。頂点集合を四等分して $V(\mathcal{H}) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ とする。まず同じ頂点集合上に完全 4 部有向グラフをつくる。各ペアの向きは、他のペアとは独立に確率 $1/2$ でランダムに決める。このグラフにおいて有向三角形をなす 3 点全体を $\mathcal{H}$ の辺集合とする。このときどの三組 (V_i, V_j, V_k) も $(\epsilon, 1/4)$ 正則であるが、$\mathcal{H}$ にはクリーク K_4^3 はひとつもない。

正則化補題は数え上げ補題と対にして用いることが多く、例えば定理 6 の証明には数え上げ補題が必須である。そのような拡張のためには上で採用した素朴な ϵ 正則の定義ではうまくいかない。

グラフの場合の分割構造は、頂点集合の分割だった。しかし k グラフにおいて正則化補題と数え上げ補題を機能させるためには、分割構造として頂点集合 V だけではなく、すべての $1 \le j < k$ に対して $\binom{V}{j}$ の分割を考えることが必要になる。次節から k グラフの分割構造について順を追って説明する。

3.2. **相対密度と正則性.** この節では ℓ 部ハイパーグラフのみを取扱うこととし、頂点集合の分割

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_\ell \tag{2}$$

を固定しておく。さらに簡単のため $|V_i| = m$ $(1 \le i \le \ell)$ としよう。この設定における j グラフ $\mathcal{H}^{(j)}$ を j シリンダ (より正確には (m, ℓ, j) シリンダ) という。1 シリンダは頂点分割 (2) を意味する。シリンダ間に階層構造を導入しよう。$(j-1)$ シリンダ $\mathcal{H}^{(j-1)}$ が j シリンダ $\mathcal{H}^{(j)}$ を 支持する とは

$$\Delta_{j-1}(\mathcal{H}^{(j)}) \subset \mathcal{H}^{(j-1)} \tag{3}$$

が成立つことと定める。ここで影の定義を思い出しておくと、$\Delta_i(\mathcal{H})$ は i シリンダであり、$I \in \Delta_i(\mathcal{H})$ となるのは $I \subset H$ なる $H \in \mathcal{H}$ が存在するときに限るのだった。クリークを用いて支持関係を述べれば、(3) は

$$\mathcal{H}^{(j)} \subset K_j(\mathcal{H}^{(j-1)})$$

と同値である。ただし $K_j(\mathcal{H}^{(i)}) = \{K : |K| = j, \binom{K}{i} \subset \mathcal{H}^{(i)}\}$ である。

定義 1 (複体)**.** シリンダの列 $\mathscr{C} = \{\mathcal{H}^{(j)}\}_{j=1}^{k}$ が複体 (あるいは (m, ℓ, k) 複体) であるとは、次の二つを満たすことをいう。

(1) $\mathcal{H}^{(1)}$ は 1 シリンダ、即ち $\mathcal{H}^{(1)} = V_1 \cup \cdots \cup V_\ell$ で、$|V_1| = \cdots = |V_\ell| = m$.
(2) $2 \le j \le k$ について $\mathcal{H}^{(j-1)}$ は $\mathcal{H}^{(j)}$ を支持する。

j シリンダ $\mathcal{H}^{(j)}$ の $(j-1)$ シリンダ $\mathcal{H}^{(j-1)}$ に関する相対密度を

$$d(\mathcal{H}^{(j)} | \mathcal{H}^{(j-1)}) = \frac{|\mathcal{H}^{(j)} \cap K_j(\mathcal{H}^{(j-1)})|}{|K_j(\mathcal{H}^{(j-1)})|}$$

と定める。ただし右辺の分母が 0 のときは密度も 0 とする。この密度を用いて ϵ 正則性を定義しよう。$\mathcal{H}^{(j)}$ が $\mathcal{H}^{(j-1)}$ 上 (ϵ, d_j) 正則 であるとは、任意の

$\mathcal{Q}^{(j-1)} \subset \mathcal{H}^{(j-1)}$ について

$$|K_j(\mathcal{Q}^{(j-1)})| \geq \epsilon |K_j(\mathcal{H}^{(j-1)})| \text{ ならば } d(\mathcal{H}^{(j)}|\mathcal{Q}^{(j-1)}) = d_j \pm \epsilon \tag{4}$$

が成立つことである。$d_j = d(\mathcal{H}^{(j)}|\mathcal{H}^{(j-1)})$ の場合には単に ϵ 正則ともいう。また $j = 2, \ldots, k$ について $\mathcal{H}^{(j)}$ が $\mathcal{H}^{(j-1)}$ 上 (ϵ, d_j) 正則であるとき、複体 $\mathscr{C} = \{\mathcal{H}^{(j)}\}_{j=1}^{k}$ は、$(\epsilon, (d_2, \ldots, d_k))$ 正則であるという。次の数え上げ補題は Kohayakawa, Rödl, Skokan によるもので、証明は比較的易しい。(正則化補題に頼らず、単独で証明できる。)

定理 7 (密な数え上げ補題 [18]). 任意の整数 $2 \leq k \leq \ell$ と正定数 γ, d に対し、$\epsilon > 0$ と $M = M(k, \ell, \gamma, d)$ が存在して、次が成立つ。$(d_2, \ldots, d_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ がすべての $2 \leq j \leq k$ で $d_j \geq d$ をみたし、$m \geq M$ で、$\mathscr{C} = \{\mathcal{H}^{(j)}\}_{j=1}^{k}$ が $(\epsilon, (d_2, \ldots, d_k))$ 正則な (m, ℓ, k) 複体ならば

$$|K_\ell(\mathcal{H}^{(k)})| = (1 \pm \gamma) \prod_{j=2}^{k} d_j^{\binom{\ell}{j}} \times m^\ell.$$

上の定理ではクリーク K_l^k を数えているが、任意の固定された k グラフを数えるように一般化することができる。

3.3. ハイパーグラフの分割構造と正則化.

この節では二種類の正則化補題 (定理 8 と定理 9) を紹介する。このために、まず k グラフの分割構造について述べよう。正整数 $a_1, \ldots, a_{k-1}$ と頂点集合の分割 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_{a_1}$ を固定しておく。(a_1 は前節の ℓ に相当。) 以下では a_1 部ハイパーグラフだけを考え、記号として

$$\binom{V}{j}^* = \{J \in \binom{V}{j} : \text{任意の } 1 \leq i \leq a_1 \text{ について } |J \cap V_i| \leq 1\}$$

を用いる。各 $\binom{V}{j}^*$ を a_j 色で塗る。即ち $j = 1, \ldots, k-1$ に対し、a_j 着色を

$$\phi_j : \binom{V}{j}^* \to [a_j]$$

とする。$\binom{V}{j}^*$ には ϕ_1 が誘導する順序を入れておく。(例えば逆辞書式順序で $J_1, J_2 \in \binom{V}{j}^*$ に対し、$J_1 < J_2$ を $\min\{\phi_1(j) : j \in J_1\} < \min\{\phi_1(j) : j \in J_2\}$ と定める。) 次に $i < j, J \in \binom{V}{j}^*$ に対して、長さ $\binom{j}{i}$ の順序つきベクトルを

$$\phi_i(J) = (\phi_i(I) : I \in \binom{J}{i})$$

と定義し、$\Phi_j(J) = (\phi_1(J), \ldots, \phi_j(J))$ とおく。さらに $J_1, J_2 \in \binom{V}{j}^*$ に同値関係 $\sim_j$ を

$$J_1 \sim_j J_2 \iff \Phi_j(J_1) = \Phi_j(J_2)$$

で入れる。ここで階層 j の分割構造を $\sim_j$ による同値類を用いて

$$\mathscr{P}^{(j)} = \binom{V}{j}^* / \sim_j$$

と定義する。$\mathscr{P}^{(j)}$ は $\binom{V}{j}^*$ を高々$a_1^{\binom{j}{1}} a_2^{\binom{j}{2}} \cdots a_j^{\binom{j}{j}}$ 個の同値類に分割する。また J(と Φ) の誘導する j 部 i グラフ (Rödl らが Polyad とよぶもの) を

$$\hat{\mathcal{P}}^{(i)}(J) = \{I \in \binom{V}{i}^* : \text{ある } I' \in \binom{J}{i} \text{ について } \Phi_i(I) = \Phi_i(I')\}$$

とおく。最後に J の定める <u>分割複体</u> を

$$\mathscr{C}(J) = \{\hat{\mathcal{P}}^{(i)}(J)\}_{i=1}^{j-1}$$

と定義する。

定義 2 (均等分割族)**.** $|V| = n = a_1 m$, $a = (a_1, \ldots, a_{k-1})$ とし、η と ϵ は正の実数とする。上で定めた分割族 $\mathscr{P} = \{\mathscr{P}^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$ が (η, ϵ, a) 均等であるとは、次が成立つことである。

(1) $i = 1, \ldots, a_1$ について $|V_i| = m$.
(2) $|\binom{V}{k} - \binom{V}{k}^*| = \binom{n}{k} - \binom{a_1}{k} m^k \le \eta \binom{n}{k}$.
(3) 任意の $K \in \binom{V}{k}^*$ について分割複体 $\mathscr{C}(K)$ は (ϵ, d) 正則な $(m, k, k-1)$ 複体である。ただし $d = (1/a_2, \ldots, 1/a_{k-1})$ とする。

定義 3 (ϵ 等質)**.** k グラフ $\mathcal{G}^{(k)}$ が分割族 $\mathscr{P}$ に関して ϵ 等質とは、任意の $K \in \binom{V}{k}^*$ に対して $\mathcal{G}^{(k)} \cap K_k(\hat{\mathcal{P}}^{(k-1)}(K))$ が $\hat{\mathcal{P}}^{(k-1)}(K)$ 上 ϵ 正則なことをいう。

一つ目の正則化補題を述べよう。

定理 8 (等質近似補題 [23])**.** 任意の整数 $k \ge 2$ と正定数 η, ν, 関数 $\epsilon : \mathbb{N}^{k-1} \to (0, 1]$ に対して、整数 T, N が存在し次が成立つ。任意の n 点 k グラフ $\mathcal{H}^{(k)}$ に対して、同一点集合上の k グラフ $\mathcal{G}^{(k)}$ と $a \in \mathbb{N}^{k-1}$ および分割族 $\mathscr{P} = \mathscr{P}(a)$ が存在し次の三つを満たす。

(1) $\mathscr{P}$ は $(\eta, \epsilon(a), a)$ 均等分割族で、$\max\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} < T$.
(2) $\mathcal{G}^{(k)}$ は $\mathscr{P}$ に関して $\epsilon(a)$ 等質。
(3) $|\mathcal{G}^{(k)} \triangle \mathcal{H}^{(k)}| \le \nu n^k$.

上の定理は、与えられた k グラフ $\mathcal{H}^{(k)}$ を少しマッサージして $\mathcal{G}^{(k)}$ を作り、非正則なところが全くないようにできると主張する。これを $k = 2$ の場合に定理 1 と比べてみよう。定理 1 では全体の ϵ 程度の非正則なペアが出ることを許している。実際、どのような分割に対しても非正則なペアが出現してしまうグラフが存在する ([20])。従って $\mathcal{H}^{(2)}$ 自身を ϵ 等質にはできず、$\mathcal{H}^{(2)}$ から $\mathcal{G}^{(2)}$ への変更は不可避である。しかし、この変更で得られる最大の利点は ϵ を a_1 の関数として制御できることにある。Gowers[8] が示したように、定理 1 では例えば $\epsilon < 1/t$ となるように正則化することは一般には不可能である。従って定理 8 において (ϵ 程度の例外を許しても) $\mathcal{H}^{(2)}$ を $\epsilon < 1/a_1$ となるように正則化することは出来ないが、νn^2 程度の辺を加減して $\mathcal{G}^{(2)}$ を作るとこちらは $\epsilon < 1/a_1$ となるように正則化できるのである。これは応用上、大きな自由度となる。なお、$\mathcal{G}^{(k)}$ には密な数え上げ補題 (定理 7) が適用できる。

一方 $\mathcal{H}^{(k)}$ 自身を正則化する形に定理 1 を拡張することもできる。このために正則性の定義 (4) を拡張しよう。正定数 δ, d と正整数 r に対して、$\mathcal{H}^{(k)}$ が $\mathcal{H}^{(k-1)}$ 上 感度 r の (δ, d) 正則 であるとは、任意の $\mathcal{Q}_1^{(k-1)}, \ldots, \mathcal{Q}_r^{(k-1)} \subset \mathcal{H}^{(k-1)}$ に対して

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{r} K_k(\mathcal{Q}_i^{(k-1)})\Big| \geq \delta |K_k(\mathcal{H}^{(k-1)})| \text{ なら } \frac{\big|\mathcal{H}^{(k)} \cap \bigcup_{i=1}^{r} K_k(\mathcal{Q}_i^{(k-1)})\big|}{\big|\bigcup_{i=1}^{r} K_k(\mathcal{Q}_i^{(k-1)})\big|} = d \pm \delta$$

が成立つことである。

定義 4 (感度 r の δ 均質)**.** 頂点集合 V 上の k グラフ $\mathcal{H}^{(k)}$ と分割族 $\mathscr{P}$ を固定する。$K \in \binom{V}{k}^*$ のうち $\mathcal{H}^{(k)}$ が $\hat{\mathcal{P}}^{(k-1)}(K)$ 上で感度 r の δ 正則でないようなもの全体を $\mathcal{K}_{\mathrm{irreg}}$ とおく。このとき $\mathcal{H}^{(k)}$ が $\mathscr{P}$ に関して感度 r の δ 均質であるとは、

$$\Big|\bigcup \{K_k(\hat{\mathcal{P}}^{(k-1)}(K)) : K \in \mathcal{K}_{\mathrm{irreg}}\}\Big| < \delta |V|^k$$

が成立つことである。

この方向での正則化補題は次の通りである。

定理 9 (感度 r の均質化補題 [26, 23])**.** 任意の整数 $k \geq 2$ と正定数 η, δ, 関数 $r : \mathbb{N}^{k-1} \to \mathbb{N}$ および $\epsilon : \mathbb{N}^{k-1} \to (0, 1]$ に対して、整数 T, N が存在し次が成立つ。任意の k グラフ $\mathcal{H}^{(k)}$ に対して、$a \in \mathbb{N}^{k-1}$ および分割族 $\mathscr{P} = \mathscr{P}(a)$ が存在し次の二つを満たす。

(1) $\mathscr{P}$ は $(\eta, \epsilon(a), a)$ 均等分割族で、$\max\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} < T$.
(2) $\mathcal{H}^{(k)}$ は $\mathscr{P}$ に関して感度 $r(a)$ の δ 均質。

定理 8 では $\mathcal{G}^{(k)}$ の正則性の誤差 ϵ を a で制御できたが、上の定理では $\mathcal{H}^{(k)}$ の正則性の誤差 δ は定数である。そのかわりに r を a で制御できることが応用上は重要となる。この正則化に対応する数え上げは、次のようになる。

定理 10 (疎な数え上げ補題 [21, 23])**.** 任意の整数 $\ell \geq k \geq 2$ と正定数 γ, d_k に対し、ある $\epsilon > 0$ が存在して、任意の正数 $d_2, \ldots, d_{k-1}$ に対し、ある正数 δ と正整数 r, M が存在して、次が成立つ。もし

(1) $\mathscr{P} = \{\mathcal{P}^{(j)}\}_{j=1}^{k-1}$ が $(\delta, (d_2, \ldots, d_{k-1}))$ 正則な $(m, \ell, k-1)$ 複体（ただし $m \geq M$）で、
(2) $\mathcal{H}^{(k)} \subset K_k(\mathcal{P}^{(k-1)})$ が $\mathcal{P}^{(k-1)}$ に関して感度 r の (ϵ, d_k) 正則、

であれば、

$$|K_\ell(\mathcal{H}^{(k)})| \geq (1-\gamma) \prod_{j=2}^{k} d_j^{\binom{\ell}{j}} \times m^\ell$$

が成立つ。

4. 応用例

この節ではハイパーグラフの正則化補題を用いて得られる結果をいくつか紹介する。

4.1. **定理 6 と関連する密度型定理.** d 次元ユークリッド空間内の有限集合 $S, T \subset \mathbb{R}^d$ について S が T の homethetic copy であるとは、ある $y \in \mathbb{R}^d$ と $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ が存在して $S = y + \lambda T$ と表せることをいう。また $[-t, t] = \{i \in \mathbb{N} : -t \le i \le t\}$ とおく。次の結果は Gallai–Witt の定理の密度版であり、Furstenberg と Katznelson[5] はエルゴード理論を用いてこれを証明した。

定理 11. 任意の有限集合 $T \subset \mathbb{R}^d$ と $\delta > 0$ に対して、有限集合 $C \subset \mathbb{R}^d$ が存在して、$|Y| > \delta|C|$ をみたす任意の $Y \subset C$ は T の *homothetic copy* を含む。

特に $T \subset [-t, t]^d$ ならある $N = N(t, d, \delta)$ が存在して $C = [-N, N]^d$ ととれる。

Rödl, Schacht, Tengan, T[25] は本質的に Solymosi[30] のアイデアを用いて定理 6 から上の結果を証明した。なお定理 11 は特別な場合 ($d = 1$) として定理 5 を含むことを注意しておこう。

同系統の密度ラムゼー型の結果をあと二つ挙げる。いずれも最初に Furstenberg と Katznelson[6] がエルゴード理論を用いて証明したものである。

定理 12. $\mathbb{F}_q$ を q 元体とする。任意の $\delta > 0$ と正整数 d に対して、ある $M_0 = M_0(q, d, \delta)$ が存在して、$M \ge M_0$ ならば $|Y| > \delta|\mathbb{F}_q^d| = \delta q^M$ をみたす任意の部分集合 $Y \subset \mathbb{F}_q^M$ は d 次元アファイン部分空間を含む。

定理 13. G を有限アーベル群とする。任意の $\delta > 0$ に対して、ある $M_0 = M_0(G, \delta)$ が存在して、$M \ge M_0$ ならば $|Y| > \delta|G|^M$ をみたす任意の部分集合 $Y \subset G^M$ は G と同型な G^M の部分群のコセットを含む。

[25] ではこれらを定理 6 から導いた。この手法の利点のひとつは N あるいは M_0 に関する量的評価が得られることで、これは [5] や [6] の証明からは得られない。

Furstenberg と Katznelson[7] は最終的には Hales–Jewett の定理 [14] の密度版の証明に成功した。これは上の三つの定理を含むものである。定理 6 あるいはその類似物からハイパーグラフの枠組みの中で Hales–Jewett の密度版を証明し対応する量的上限を与えることは、未解決の問題である。

4.2. **グラフの詰込みに関する結果.** $\mathcal{F}_0$ を固定された k グラフとする。大きな k グラフ $\mathcal{H}$ の中に辺素に $\mathcal{F}_0$ がどのくらいとれるかを考えたい。その最大値 $\nu(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0)$ を $\mathcal{H}$ の $\mathcal{F}_0$ に関する整数詰込み数という。分数詰込み (fractional packing) を定義するためもう少し形式的な準備をしよう。$\mathcal{H}$ に含まれる $\mathcal{F}_0$ のコピー全体を $\binom{\mathcal{H}}{\mathcal{F}_0}$ とかく。写像 $\phi^* : \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{F}_0} \to [0, 1]$ が分数詰込みであるとは、$\mathcal{H}$ の任意の辺 H について

$$\sum\{\phi^*(\mathcal{F}) : H \in \mathcal{F} \in \tbinom{\mathcal{H}}{\mathcal{F}_0}\} \le 1$$

が成立つことをいう。その重み $w(\phi^*) = \sum\{\phi^*(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \binom{\mathcal{H}}{\mathcal{F}_0}\}$ の最大値 $\max\{w(\phi^*) : \phi^*$ は分数詰込み $\}$ が分数詰込み数 $\nu^*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0)$ である。分数詰込み ϕ^* の値域が $\{0, 1\}$ の場合は、これを整数詰込みとよび、上と同様に $\nu(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0)$ が定義される。

定義から一般に $\nu^*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0) \geq \nu(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0)$ である。例えば $k = 2$(グラフ) において $\mathcal{F}_0 = K_3^2$(三角形)、$\mathcal{H} = K_4^2$ の場合を考えてみよう。位数 4 の完全グラフに辺素な三角形はひとつしかとれないから $\nu(K_4^2, K_3^2) = 1$ である。一方 K_4^3 には 4 個の三角形があり、各辺はちょうど 2 個ずつの三角形にのっているから、各三角形に 1/2 を割振るとこれは分数詰込みになって $\nu^*(K_4^2, K_3^2) \geq 2$ がわかる。実は頂点数 n が十分大きく、辺数が cn^k 程度の密な k グラフでは ν^* と ν はきわめて近くなる。

定理 14. 任意の k グラフ $\mathcal{F}_0$ と $\epsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n > N$ ならば任意の n 点 k グラフ $\mathcal{H}$ に対し、

$$\nu^*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0) - \nu(\mathcal{H}, \mathcal{F}_0) < \epsilon n^k$$

が成立つ。

上の定理はまず $k = 2$ の場合を Haxell と Rödl[16] が証明し、次に $k = 3$ の場合を [3] の正則化補題を用いて Haxell, Nagle, Rödl[15] が証明した。これらの結果の証明は、ほぼ最善の整数詰込みを分数詰込みの情報から構成する決定的な算法を与える。その基礎には正則化補題の algorithmic version とよばれるものが使われる。Yuster[35] は $k = 2$ の場合に一部ランダムな算法を導入することで証明を簡易化し、グラフの族の詰込みへの拡張を行った。Rödl, Schacht, Siggers, T[24] は、k グラフの等質近似補題 (定理 8) と密な数え上げ補題 (定理 7) を用いて定理 14 を証明した。なお、上に挙げたどの証明もハイパーグラフのマッチングに関する結果 [2, 22] を利用する。

計算量に関しては、ν の計算が（$k = 2$ の場合でさえ）NP-hard であるのに対し、ν^* の計算は線形計画の問題である。従って上の定理は密なハイパーグラフにおいて NP-hard な問題の近似解が多項式時間で得られる例である。

References

[1] P. Erdős, P. Frankl, and V. Rödl, *The asymptotic number of graphs not containing a fixed subgraph and a problem for hypergraphs having no exponent*, Graphs and Combinatorics **2** (1986), no. 2, 113–121.

[2] P. Frankl and V. Rödl, *Near perfect coverings in graphs and hypergraphs*, European J. Combin. **6** (1985), no. 4, 317–326.

[3] ———, *Extremal problems on set systems*, Random Structures Algorithms **20** (2002), no. 2, 131–164.

[4] H. Furstenberg, *Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions*, J. Analyse Math. **31** (1977), 204–256.

[5] H. Furstenberg and Y. Katznelson, *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations*, J. Analyse Math. **34** (1978), 275–291 (1979).

[6] ———, *An ergodic Szemerédi theorem for IP-systems and combinatorial theory*, J. Analyse Math. **45** (1985), 117–168.

[7] ———, *A density version of the Hales-Jewett theorem*, J. Anal. Math. **57** (1991), 64–119.

[8] W. T. Gowers, *Lower bounds of tower type for Szemerédi's uniformity lemma*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 2, 322–337.

[9] ———, *A new proof of Szemerédi's theorem*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 3, 465–588.

[10] ______, *Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem*, submitted.
[11] ______, *Quasirandomness, counting and regularity for 3-uniform hypergraphs*, submitted.
[12] B. Green, *A Szemerédi type regularity lemma in abelian groups*, Geom. Funct. Anal., to appear.
[13] B. Green, T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, submitted.
[14] A. W. Hales and R. I. Jewett, *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 222–229.
[15] P. E. Haxell, B. Nagle, and V. Rödl, *Integer and fractional packings in dense 3-uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms **22** (2003), no. 3, 248–310.
[16] P. E. Haxell and V. Rödl, *Integer and fractional packings in dense graphs*, Combinatorica **21** (2001), no. 1, 13–38.
[17] Y. Kohayakawa, *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of computational mathematics (Rio de janeiro, 1997) (F. Cucker and M. Shub, eds.) Springer, Berlin, January 1997, pp. 216–230.
[18] Y. Kohayakawa, V. Rödl, and J. Skokan, *Hypergraphs, quasi-randomness, and conditions for regularity*, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), no. 2, 307–352.
[19] J. Komlós, A. Shokoufandeh, M. Simonovits, E. Szemerédi, *The regularity lemma and its applications in graph theory*, Theoritical aspects of computer science (Tehran, 2000), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 2292, Springer, Berlin, 2002, pp. 84–112.
[20] J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996, pp. 295–352.
[21] B. Nagle, V. Rödl, and M. Schacht, *The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms, to appear.
[22] N. Pippenger and J. Spencer, *Asymptotic behavior of the chromatic index for hypergraphs*, J. Combin. Theory Ser. A **51** (1989), no. 1, 24–42.
[23] V. Rödl and M. Schacht, *Regular partitions of Hypergraphs*, Manuscript.
[24] V. Rödl, M. Schacht, M. H. Siggers, N. Tokushige, *Integer and fractional packings of hypergraphs*, submitted.
[25] V. Rödl, M. Schacht, E. Tengan, N. Tokushige, *Density theorems and extremal hypergraph problems*, Israel J. Math., to appear.
[26] V. Rödl and J. Skokan, *Regularity lemma for k-uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms **25** (2004), no. 1, 1–42.
[27] ______, *Applications of the regularity lemma for uniform hypergraphs*, Random Structures Algorithms, to appear.
[28] K. Roth, *Sur quelques ensembles d'entiers*, C. R. Acad. Sci. Paris 234, (1952). 388–390.
[29] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi, *Triple systems with no six points carrying three triangles*, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Colloq. Keszthely, 1976), Vol. II, 939–945.
[30] J. Solymosi, *A note on a question of Erdős and Graham*, Combin. Probab. Comput. **13** (2004), no. 2, 263–267.
[31] E. Szemerédi, *On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression*, Acta Arith. **27** (1975), 199–245, Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.
[32] ______, *Regular partitions of graphs*, Problèmes combinatoires et théorie des graphes (Colloq. Internat. CNRS, Univ. Orsay, Orsay, 1976), CNRS, Paris, 1978, pp. 399–401.
[33] T. Tao, *A quantitative ergodic theory proof of Szemerédi's theorem*, submitted.
[34] ______, *A variant of the hypergraph removal lemma*, submitted.
[35] R. Yuster, *Integer and fractional packing of families of graphs*, to appear.