3　フーリエ変換

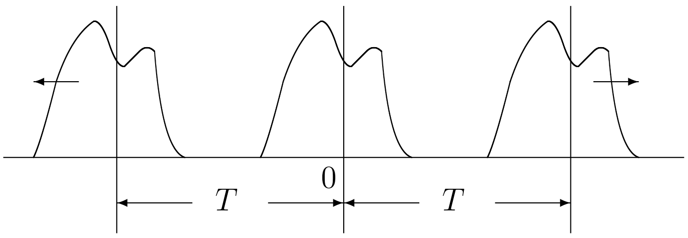
3.1　非周期関数

[非周期関数の定義]

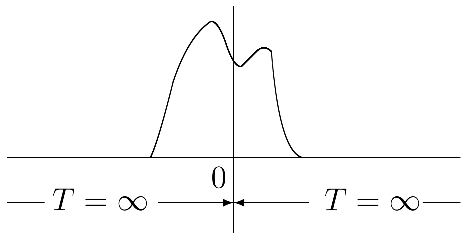
非周期関数 $f(x)$ とは

$$f(x+T) = f(x) \tag{3.1}$$

を満たす $T>0$ が存在しない関数である。非周期関数はまた, 周期関数の周期 T が $T{\rightarrow}\infty$ となったものと考えることができる。したがって, 非周期関数は, 周期関数の極限 $(T{\rightarrow}\infty)$ として定義する。



周期関数



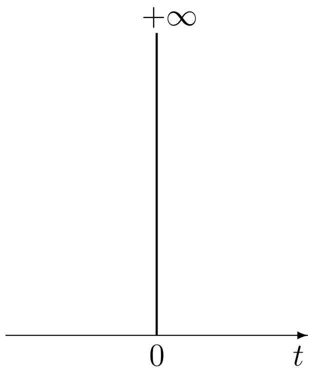
周期関数の極限としての非周期関数

[ディラックのデルタ関数と単位インパルス]

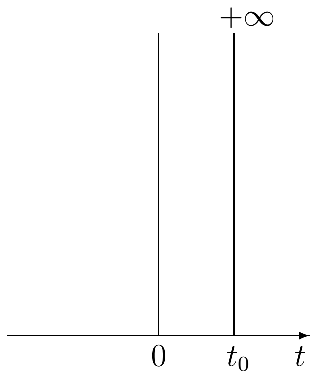
単位インパルスをディラックのデルタ関数を用いて以下のように定義する。

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & (t=t_0) \\ 0 & (t{\neq}t_0) \end{cases}$$

単位インパルスは時刻 $t=t_0$ で $\delta(t_0-t_0)=\delta(0)=\infty$ となる関数で, ディラックのデルタ関数を時刻 t_0 だけ平行移動した関数である ($t_0=0$ のとき, ディラックのデルタ関数となる)。



ディラックのデルタ関数 $\delta(t)$



単位インパルス $\delta(t-t_0)$

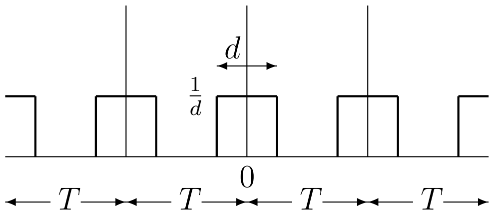
＜周期関数の極限としての非周期関数の例 (単一矩形波および単位インパルス) ＞

次式で表わされる幅 d, 高さ $\frac{1}{d}$(面積は 1) の矩形パルス列を考える。

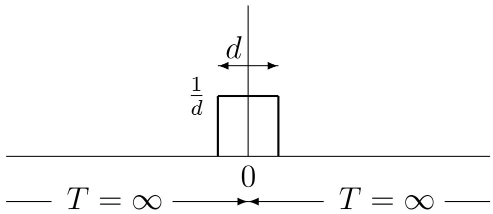
$$f_{d,T}(t) = \begin{cases} \frac{1}{d} & (|t| \leq \frac{d}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{d}{2}) \end{cases} \quad , \quad f_{d,T}(t+nT) = f_{d,T}(t)$$

d を一定として $T \to \infty$ とすれば, 周期関数である矩形パルス列の極限として非周期関数の単一矩形波 ($f_{d,\infty}(t) = f_d(t)$) が得られる。

$$f_d(t) = \lim_{T\to\infty} f_{d,T}(t) = \begin{cases} \frac{1}{d} & (|t| \leq \frac{d}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{d}{2}) \end{cases}$$



矩形パルス列 $f_{d,T}(t)$ の波形

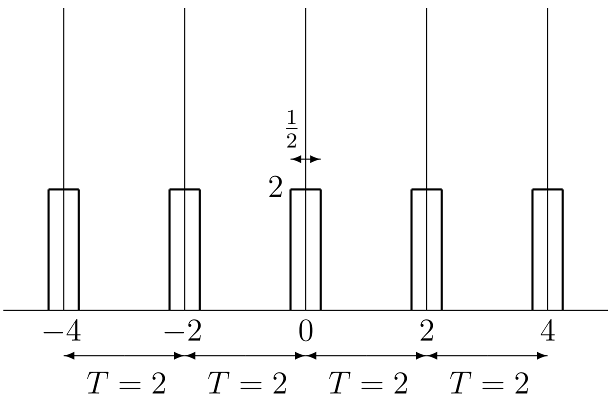


単一矩形波 $f_d(t)$ の波形

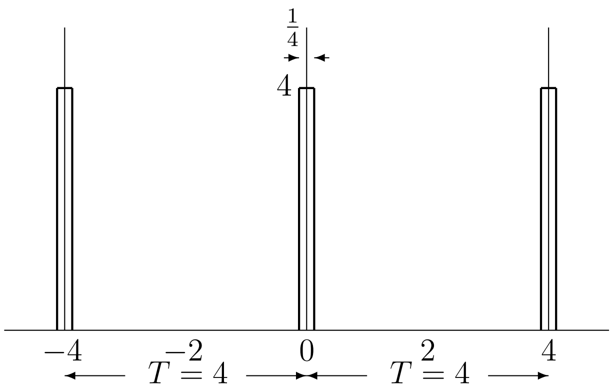
また, $d = \frac{1}{T}$ ($\frac{1}{d} = T$) とおくと

$$f_{\frac{1}{T},T}(t) = \begin{cases} T & (|t| \leq \frac{1}{2T}) \\ 0 & (|t| > \frac{1}{2T}) \end{cases} \quad , \quad f_{\frac{1}{T},T}(t+nT) = f_{\frac{1}{T},T}(t)$$

となる。



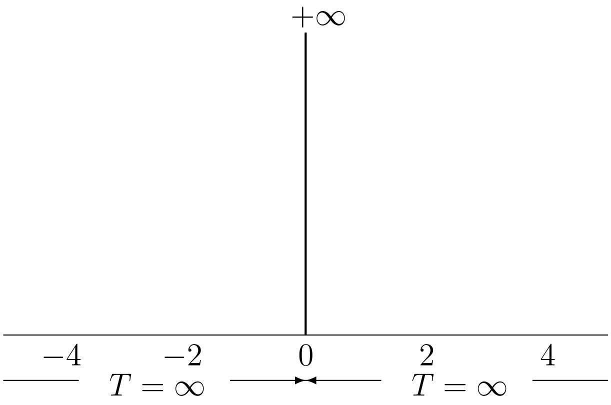
$f_{\frac{1}{2},2}(t)$ の波形



$f_{\frac{1}{4},4}(t)$ の波形

　ここで, $T \to \infty$ ($\frac{1}{T} \to 0$) とすれば単一矩形波の場合と同様に, 周期的な矩形パルス列の極限として, 非周期関数である単位インパルス ($f_{0,\infty}(t) = \delta(t)$) が得られる。

$$\delta(t) = \lim_{T\to\infty} f_{\frac{1}{T},T}(t) = \begin{cases} \infty & (t = 0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$



周期関数の極限としての単位インパルス $\delta(t)$

3.2　フーリエ変換

[フーリエ積分公式]

周期 $T = 2L$ の周期関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ が複素フーリエ級数に展開できるとすると

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\frac{\pi}{L})x} \tag{3.2}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in(\frac{\pi}{L})x}\,dx \tag{3.3}$$

ここで

$$\omega_n = n\frac{\pi}{L}, \quad \Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = (n+1)\frac{\pi}{L} - n\frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \quad (\frac{1}{2L} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}) \tag{3.4}$$

として

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-in(\frac{\pi}{L})y}\,dy\right]e^{in(\frac{\pi}{L})x} && (3.5)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(y)e^{-i\omega_n y}\,dy\right]e^{i\omega_n x}\Delta\omega && (3.6)\end{aligned}$$

$L\to\infty$ $(\Delta\omega\to 0)$ として非周期関数を考える。$f(x)$ が区分的に滑らかで, かつ, 絶対可積分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \ < \infty$ とすると, **リーマン積分**の定義 ($\sum_{n=-\infty}^{\infty} \to \int_{-\infty}^{\infty}, \ \omega_n \to \omega, \ \Delta\omega \to d\omega$)

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,d\omega \tag{3.7}$$

より

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right]e^{i\omega x}\,d\omega \tag{3.8}$$

が得られる。上式を $f(x)$ に対する **(複素形) フーリエ積分表示**という。

[フーリエ変換]

フーリエ積分公式を次のように書き直すことができる。

$$\text{フーリエ逆変換}: \ f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \quad (F(\omega)\text{ から } f(x) \text{ を計算}) \tag{3.9}$$

$$\text{フーリエ変換}: \ F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \qquad (f(x)\text{ から } F(\omega) \text{ を計算}) \tag{3.10}$$

関数 $F(\omega)$ を関数 $f(x)$ の**フーリエ変換**, $f(x)$ を $F(\omega)$ の**フーリエ逆変換**という。また, フーリエ変換を行なう写像を $\mathcal{F}$ で表わし, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)]$ のように表記する。同様に, フーリエ逆変換を行なう写像を $\mathcal{F}^{-1}$ で表わし, $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$ のように表記する。

＜参考＞テキストによっては、係数が下記のようになる。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \tag{3.11}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \tag{3.12}$$

＜非周期関数 $f(x)$ のフーリエ変換の計算例１＞

関数 $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求める。

$$\begin{aligned}F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \int_{-1}^{1} 1\cdot e^{-i\omega x}\,dx\\ &= \left[\frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega}\right]_{-1}^{1} \qquad (\omega\neq 0 \text{ の場合})\\ &= \frac{1}{-i\omega}\left(e^{-i\omega}-e^{i\omega}\right)\\ &= \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}\right)\\ &= \frac{2\sin\omega}{\omega}\end{aligned}$$

したがって

$$F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega} \quad (\omega\neq 0)$$

ところで, $\omega=0$ の場合は

$$\begin{aligned}F(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{0}\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\\ &= \int_{-1}^{1} 1\,dx \;=\; [x]_{-1}^{1}\\ &= [1-(-1)] \;=\; 2 \quad (\omega=0)\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ のフーリエ変換の解答として以下の 2 つはそれぞれ正しい ($\omega=0$ での値は計算してもしなくてもよい)。

$$F(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega} \quad (\omega\neq 0) \qquad \text{または} \qquad F(\omega)=\begin{cases}\frac{2\sin\omega}{\omega} & (\omega\neq 0)\\ 2 & (\omega=0)\end{cases}$$

※関数 $f(x)$ のフーリエ変換において, $\omega=0$ の値 $F(0)$ を計算してもしなくてもよいのはなぜか？それは, フーリエ変換 $\mathcal{F}$ とフーリエ逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ が対で存在し,

(1) $f(x)$ と $F(\omega)$ がそれぞれ積分の計算による変換 $F(\omega)=\mathcal{F}[f(x)]$, $f(x)=\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)](=\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]])$ を満たす関数であればよいことと,

(2) フーリエ変換前の関数である $f(x)$ は有限個の不連続点を含んでいても区分的に連続であればよく, 不連続点での厳密な値は必要としない。ただし, 不連続点 x ではその前後の中間値 $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ に収束するものとみなされる (ディリクレ条件参照)。したがって, フーリエ変換とフーリエ逆変換は対称であるので, $F(\omega)$ においても, 有限個の不連続点 (例えば $\omega=0$) を含んでいても逆変換は収束し値が求まる。すなわち, 不連続点での値が問われない (例えば強制的に $F(0)=a$ と定義しても無視される)。

ただし, 関数 $f(x)$ が絶対可積分の関数であれば, そのフーリエ変換 $F(\omega)$ が存在し, しかも $F(\omega)$ は連続な関数となることがわかっている。また, $\omega=0$ の場合は $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ であり, 関数 $f(x)$ の面積そのものとなることがわかる。したがって, 通常はフーリエ解析における不連続点の取り扱いが, ある程度あいまい性を有しているため, 不連続点に関しては, 厳密な値を求めなくてもよいことになるが, 厳密に計算可能であるのでグラフなどを描く必要がある場合には計算すべきである。

＜非周期関数 $f(x)$ のフーリエ変換の計算例 2 (テキスト P.75 例題 3.1(2)) ＞

関数 $f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求める。

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(-x)}e^{-i\omega x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+i\omega)x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{a-i\omega}e^{(a-i\omega)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-(a+i\omega)}e^{-(a+i\omega)x}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \left(\frac{1}{a-i\omega}-0\right) + \left(0+\frac{1}{a+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{a-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega} \\
&= \frac{2a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

＜参考＞テキストでは $\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}\,dx$ の積分をまず上下の積分区間を入れ換え

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}\,dx = -\int_{0}^{-\infty} e^{(a-i\omega)x}\,dx$$

とし, 次に $x=-x'$ の変数変換を行えば, $x'\to\infty$ で $x\to-\infty$ となり, $dx=-dx'$ であるので

$$\begin{aligned}
-\int_{0}^{-\infty} e^{(a-i\omega)x}\,dx &= -\int_{0}^{\infty} e^{(a-i\omega)(-x')}\,(-dx') \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\omega)x'}\,dx'
\end{aligned}$$

最後に積分変数は x' でも x でもどちらでも構わないので x' を x に戻すと

$$\int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\omega)x}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\omega)x}\,dx$$

の関係が得られるが, 当然, 積分結果は同じであるので, わざわざ変形して計算する必要はないものと思われる。また, $f(x)$ が偶関数であっても, $f(x)$ と複素指数関数 $e^{-i\omega x}$ の積 $f(x)e^{-i\omega x}$ は偶関数にも奇関数にもならないことに注意せよ。

3.3 フーリエ正弦変換とフーリエ余弦変換

[実フーリエ級数に対応するフーリエ積分表示]

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right]e^{i\omega x}\,d\omega && (3.13)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega && (3.14)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega && (3.15)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{-\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega && (3.16)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega(x-y)}\,dy\,d\omega && (3.17)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cdot\frac{1}{2}(e^{i\omega(x-y)} + e^{-i\omega(x-y)})\,dy\,d\omega && (3.18)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\omega(x-y)\,dy\,d\omega && (3.19)
\end{aligned}
$$

ここで, 加法定理 $\cos\omega(x-y) = \cos\omega x\cos\omega y + \sin\omega x\sin\omega y$ を用いると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\{\cos\omega x\cos\omega y + \sin\omega x\sin\omega y\}\,dy\,d\omega && (3.20)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos\omega y\,dy\cos\omega x + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin\omega y\,dy\sin\omega x\right]d\omega && (3.21)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega && (3.22)
\end{aligned}
$$

ただし

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx, \quad B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \tag{3.23}$$

となり, 実フーリエ級数に対応する (一般形) フーリエ積分表示が得られる。

[フーリエ余弦変換]

$f(x)$ が偶関数ならば $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)\sin\omega x}_{\text{偶}\times\text{奇}\to\text{奇}}\,dx = 0,\ A(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} \underbrace{f(x)\cos\omega x}_{\text{偶}\times\text{偶}\to\text{偶}}\,dx$ となり

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_{\mathrm{C}}(\omega)\cos\omega x\,d\omega \tag{3.24}$$

$$F_{\mathrm{C}}(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx \tag{3.25}$$

$F_{\mathrm{C}}(\omega)$ をフーリエ余弦変換という。

[フーリエ正弦変換]

$f(x)$ が奇関数ならば $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x)\cos\omega x}_{\text{奇}\times\text{偶}\to\text{奇}}\,dx = 0,\ B(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} \underbrace{f(x)\sin\omega x}_{\text{奇}\times\text{奇}\to\text{偶}}\,dx$ となり

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_{\mathrm{S}}(\omega)\sin\omega x\,d\omega \tag{3.26}$$

$$F_{\mathrm{S}}(\omega) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \tag{3.27}$$

$F_{\mathrm{S}}(\omega)$ をフーリエ正弦変換という。

＜参考＞テキストによっては、係数が下記のようになる。
フーリエ余弦変換の場合

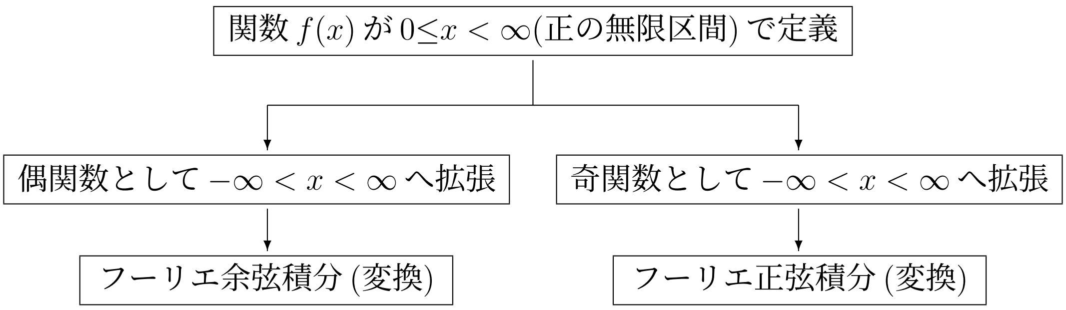
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_{\mathrm{C}}(\omega) \cos \omega x \, d\omega \tag{3.28}$$

$$F_{\mathrm{C}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx \tag{3.29}$$

フーリエ正弦変換の場合

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_{\mathrm{S}}(\omega) \sin \omega x \, d\omega \tag{3.30}$$

$$F_{\mathrm{S}}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx \tag{3.31}$$



※原点において関数 $f(x)$ が滑らかになるように拡張すると変換後の性質が良くなる。

フーリエ級数・変換のまとめ3

	周期関数 (周期 2π, 周期 $2L$)	非周期関数
複素形	複素フーリエ級数 (係数)	(複素形) フーリエ積分 (変換)
実数形	(実) フーリエ級数 (係数)	一般形フーリエ積分
偶関数	フーリエ余弦級数 (係数)	フーリエ余弦積分 (変換)
奇関数	フーリエ正弦級数 (係数)	フーリエ正弦積分 (変換)

複素形フーリエ積分表示	一般形フーリエ積分表示
$f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\omega y}\,dy\right]e^{i\omega x}\,d\omega$	$f(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\Big[A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x\Big]\,d\omega$ $A(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$ $B(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$

フーリエ変換	フーリエ逆変換 (反転公式)
$F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$ $\left(F(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)$	$f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$ $\left(f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\right)$

フーリエ余弦変換	フーリエ余弦積分 (反転公式)
$F_{\mathrm{C}}(\omega) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx$ $\left(F_{\mathrm{C}}(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx\right)$	$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} F_{\mathrm{C}}(\omega)\cos\omega x\,d\omega$ $\left(f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\infty} F_{\mathrm{C}}(\omega)\cos\omega x\,d\omega\right)$

フーリエ正弦変換	フーリエ正弦積分 (反転公式)
$F_{\mathrm{S}}(\omega) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$ $\left(F_{\mathrm{S}}(\omega) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx\right)$	$f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty} F_{\mathrm{S}}(\omega)\sin\omega x\,d\omega$ $\left(f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\infty} F_{\mathrm{S}}(\omega)\sin\omega x\,d\omega\right)$

3.4　留数の定理による複素フーリエ変換の計算

[ジョルダンの補助定理]

　複素 z 平面の上半面中の半径 r の半円 $C_+(r)$ を考える。この $C_+(r)$ に沿う反時計回りの複素積分

$$\int_{C_+(r)} f(z)e^{iaz}\,dz$$

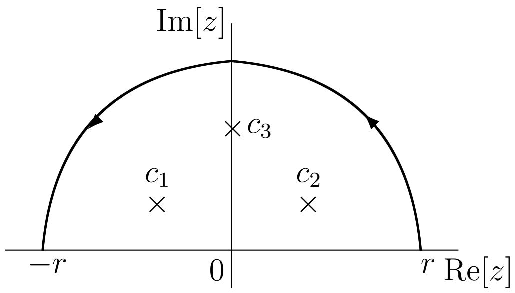
は $a>0$ で, $f(z)$ が

$$f(z)=\frac{b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1 z+b_0}{a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1 z+a_0}\quad (a_n\neq 0,\ b_m\neq 0)$$

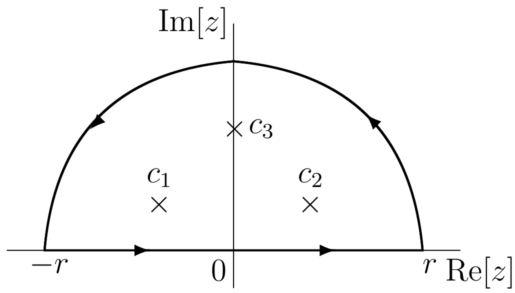
と書け ($f(z)$ を z の有理関数という), $n>m\geq 0$ であれば, $r\to\infty$ で

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C_+(r)} f(z)e^{iaz}\,dz=0$$

となる。これは**ジョルダンの補助定理**と呼ばれる。



積分路 $C_+(r)$



積分路 $C(r)$

[複素フーリエ変換の計算]

　$C_+(r)$ に実軸上の線分 $-r\leq x\leq r$ を加えた閉曲線 $C(r)$ を考える。$\omega>0$ のとき, $C(r)$ に沿う反時計回りの複素積分は, ジョルダンの補助定理より

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\int_{C(r)} f(z)e^{iaz}\,dz &= \lim_{r\to\infty}\left\{\int_{-r}^{r} f(z)e^{iaz}\,dz+\int_{C_+(r)} f(z)e^{iaz}\,dz\right\}\\
&= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\,dx+\lim_{r\to\infty}\int_{C_+(r)} f(z)e^{iaz}\,dz\\
&= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{iax}\,dx+0\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx
\end{aligned}$$

となることがわかる。ここで, 一般に複素関数 $g(z)$ の積分は**留数の定理**を用いて

$$\int_{C(r)} g(z)\,dz=2\pi i\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Res}(g;c_n)$$

となる。ここで, $z=c$ における $g(z)$ の留数 $\mathrm{Res}(g;c)$ は, 点 c で n 位の極をもつとき

$$\mathrm{Res}(g;c)=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[g(z)(z-c)^n]\right)_{z=c}$$

で求められる。これより, $a>0$ のときは, c_n を z 平面の上半面に含まれる $f(z)$ の極として

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Res}(f(z)e^{iaz};c_n) \tag{3.32}$$

$a<0$ のときは, c'_n を z 平面の下半面に含まれる関数 $f(z)$ の極として

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}\,dx = -2\pi i\sum_{n=1}^{N}\mathrm{Res}(f(z)e^{iaz};c'_n) \tag{3.33}$$

で計算できる。

※関数 $f(z)$ の極がどこにあるのかがわかっており, その留数が簡単に求められる場合には, 留数の定理により簡単にフーリエ変換やフーリエ逆変換が計算できる (ラプラス変換やラプラス逆変換などでもよく用いられる手法である)。

3.5 フーリエ変換の性質

[フーリエ変換の基本的性質]
(1) 重ね合わせの原理

$$\text{線形性：}\quad \mathcal{F}[af(x)+bg(x)] = a\mathcal{F}[f(x)] + b\mathcal{F}[g(x)] \tag{3.34}$$

が成り立つ。これは, フーリエ変換が線形システム (テキスト P.49 参照) であることを表わしている。
(2) 実数 $s \neq 0$ に対して

$$\text{相似性：}\quad \mathcal{F}[f(sx)](\omega) = \frac{1}{|s|}\mathcal{F}[f(x)](\frac{\omega}{s}) \tag{3.35}$$

が成り立つ。(2) の結果から, 特に $s=-1$ の場合は, $\mathcal{F}[f(-x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](-\omega)$ となる。
(3) フーリエ変換とフーリエ逆変換の対称性から

$$\text{対称性：}\quad \mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) = 2\pi f(-x) \tag{3.36}$$

が成り立つ。(3) の結果から, 関数 $f(x)$ が偶関数であれば, $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) = 2\pi f(x)$, 奇関数であれば, $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) = -2\pi f(x)$ となる。
(4) 周波数シフトの法則

$$\text{(平行) 移動性：}\quad \mathcal{F}[f(t)e^{i\omega_0 t}] \;=\; F(\omega-\omega_0) \tag{3.37}$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] \;=\; F(\omega)e^{-it_0\omega} \tag{3.38}$$

が成り立つ。
(5) 微分演算

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n\mathcal{F}[f(x)] \tag{3.39}$$

が成り立つ。したがって, 関数を微分することはフーリエ変換では $i\omega$ をかけるという簡単な代数的操作に置き換わる。また, $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ の微分に関して

$$F^{(n)}(\omega) \;=\; \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)] \tag{3.40}$$

$$\;=\; (-i)^n\mathcal{F}[(x)^n f(x)] \tag{3.41}$$

が成り立つ。

＜参考＞フーリエ変換とフーリエ逆変換の公式が以下のように定義してある場合

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \tag{3.42}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \tag{3.43}$$

フーリエ変換の性質 (3) は次式のようになる。

$$\text{対称性：}\quad \mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) = f(-x) \tag{3.44}$$

これは, フーリエ変換とフーリエ逆変換において, 係数がちょうど等しく対称になるように定義してあるためであり, より対称性が明確に表われている。

[対称性を利用したフーリエ変換の計算法]

まず, 関数 $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求める (テキスト P.75 例題 3.1(2) 参照)。

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-(-x)}e^{-i\omega x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{-i\omega x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\omega)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1+i\omega)x}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{1-i\omega}e^{(1-i\omega)x}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{1}{-(1+i\omega)}e^{-(1+i\omega)x}\right]_{0}^{\infty} \\
&= \left(\frac{1}{1-i\omega} - 0\right) + \left(0 + \frac{1}{1+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega} \\
&= \frac{2}{1+\omega^2}
\end{aligned}$$

したがって, 関数 $f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換が $F(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$ であることがわかる。ここで, 関数 $f(x)$ が x の有理関数として $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ のように与えられた場合のそのフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めることを考える。有理関数のフーリエ変換は 3.4 節にあるように複素積分を導入することにより留数の定理を用いて求めることができるが, フーリエの積分公式あるいはフーリエ変換とフーリエ逆変換の対称性を利用しても計算できる。

$f(x) = e^{-|x|}$ のフーリエ変換が $\mathcal{F}[f(x)] = \frac{2}{1+\omega^2}$ であるので, 対称性の公式における左辺は

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) = \mathcal{F}[\frac{2}{1+\omega^2}](x)$$

となる。一方, 右辺は関数 $f(x)$ の x を $-x$ に置き換えて, $f(-x) = e^{-|x|}$ となるので, それぞれ代入すると

$$\mathcal{F}[\frac{2}{1+\omega^2}](x) = 2\pi e^{-|x|}$$

が得られる。フーリエ変換は線形システムであるので, 両辺を 2 で割って

$$\mathcal{F}[\frac{1}{1+\omega^2}](x) = \pi e^{-|x|}$$

となる。これは, 与えられた関数の変数が ω で, フーリエ変換後の関数の変数が x の形式 ($f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-ix\omega}\,d\omega$) になっており, 通常のフーリエ変換の公式 ($F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$) と変数が全く逆になっている。そこで, 変数 ω と変数 x を入れ換えると

$$\mathcal{F}[\frac{1}{1+x^2}](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

となり, 関数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ のフーリエ変換が $F(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$ であることがわかる。これはテキスト P.83 例題 3.4 の結果と一致している。

3.6　線形システムの解析 (合成積とフーリエ変換)

[合成積の定義]

　任意の関数 $f(x)$, $g(x)$ の無限区間 $(-\infty, \infty)$ での積分

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy \tag{3.45}$$

を $f(x)$ と $g(x)$ の**合成積** (たたみこみ演算) という ($(f * g)(x)$ と書く場合もある)。

　合成積に関して以下の性質が成り立つ。

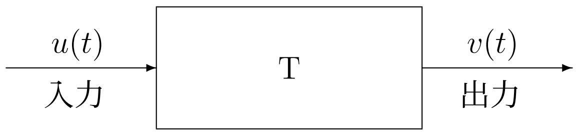
$$\text{可換則 :}\quad f * g(x) = g * f(x) \tag{3.46}$$

[インパルス応答]

　入力 $u(t)$ に対して, $v(t)$ が出力されるシステム $v(t) = \mathrm{T}[u(t)]$ において

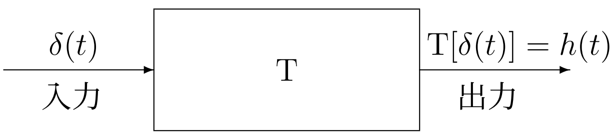
$$\mathrm{T}[a_1u_1(t) + a_2u_2(t)] = a_1\mathrm{T}[u_1(t)] + a_2\mathrm{T}[u_2(t)]$$

を満たすシステムを**線形システム**という (テキスト P.49 参照)。

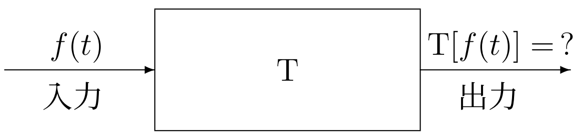


線形システム

　この線形システムにデルタ関数 $\delta(t)$ を入力したときの応答 $h(t) = \mathrm{T}[\delta(t)]$ を**インパルス応答**という。



インパルス応答



任意の入力 $f(t)$ に対する応答

　線形システムは, 任意の入力 $f(t)$ を加えたときの出力が, このシステムにデルタ関数 $\delta(t)$ を入力したときの出力 $h(t)$, すなわち, インパルス応答をもとに計算できるという性質をもっている。これは, 任意の入力 $f(t)$ がデルタ関数の性質により

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s)\,ds \quad (= f * \delta(t))$$

として, デルタ関数との合成積で表現できることと, T の線形性により, 積分と T を演算する順序を交換できることから, $h(t-s) = \mathrm{T}[\delta(t-s)]$ が成り立つ時不変システムとすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}[f(t)] &= \mathrm{T}[\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\delta(t-s)\,ds] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\mathrm{T}[\delta(t-s)]\,ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)h(t-s)\,ds \quad (= f * h(t))
\end{aligned}$$

[伝達関数]
　システムに $e^{i\omega t}$ という正弦波入力が加えられたときの出力を

$$\mathrm{T}[e^{i\omega t}] = H(i\omega)e^{i\omega t} \quad (= h * e^{i\omega t}(t))$$

とする。入力 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$ $(F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega))$ に対するシステムの応答は

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}[f(t)] &= \mathrm{T}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{T}[e^{i\omega t}]\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)](\omega)H(i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega
\end{aligned}$$

として求められる。$H(i\omega)e^{i\omega t}$ は, インパルス応答 $h(t)$ と関数 $e^{i\omega t}$ の合成積の計算より

$$H(i\omega)e^{i\omega t} = h * e^{i\omega t}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{i\omega(t-s)}\,ds = [\int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s}\,ds]e^{i\omega t}$$

と計算できる。したがって, 関数 $H(i\omega)$ は

$$H(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)e^{-i\omega s}\,ds = \mathcal{F}[h(s)](\omega)$$

となり, $H(i\omega)$ はインパルス応答 $h(t)$ のフーリエ変換であることがわかる。この関数は正弦波入力が何倍となって出力に現われるかを示すもので, **伝達関数** (あるいは周波数特性) と呼ばれる。インパルス応答 $h(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}[h(t)](\omega)$ および入力 $f(t)$ と出力 $\mathrm{T}[f(t)]$ の関係 $\mathrm{T}[f(t)] = f * h(t)$ を用いれば

$$f * h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f(t)]\mathcal{F}[h(t)]e^{i\omega t}\,d\omega$$

と書くことができる。

[合成積のフーリエ変換に関する定理]
　合成積のフーリエ変換 $\mathcal{F}[f * g(x)]$ に関して以下の定理が成り立つ。

$$\mathcal{F}[f * g(x)](\omega) = \mathcal{F}[f(x)](\omega)\mathcal{F}[g(x)](\omega) \tag{3.47}$$

したがって, 式 (3.47) より, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の合成積 $f * g(x)$ はフーリエ変換とフーリエ逆変換を用いて次式で求めることができる。

$$f * g(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(x)]\mathcal{F}[g(x)]] \tag{3.48}$$

[フーリエ変換の合成積に関する定理]
　フーリエ変換の合成積 $\mathcal{F}[f(x)] * \mathcal{F}[g(x)]$ に関して以下の定理が成り立つ。

$$\mathcal{F}[f(x)] * \mathcal{F}[g(x)](\omega) = 2\pi\mathcal{F}[f(x)g(x)](\omega) \tag{3.49}$$

※式 (3.47) (または式 (3.48)) と式 (3.49) より, 合成積の計算あるいは, 合成積を含んだ形のフーリエ変換 (式の左辺) は, 合成積を含まない形のフーリエ変換 (式の右辺) で計算できることがわかる。つまり, これらの定理を用いることにより合成積を直接計算することなく, その値を求めることができるので非常に便利である。

＜参考＞ $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ の合成積に関して次の性質が成り立つ。

結合則: $(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$

分配則: $f * (g + h)(x) = f * g(x) + f * h(x)$

3.7 フーリエ変換に対するパーシバルの等式とその応用

[パーシバルの等式]

フーリエ級数のときと同様に, 関数 $f(x)$ を 2 乗した積分を考える。ただし, 積分区間は $-\infty$ から ∞ とする。

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx$$

ここで, $f(x)$ を一般に複素関数として, その複素共役を $f^*(x)$ とおけば, $f(x)f^*(x) = |f(x)|^2$ の関係がある (もちろん, $f(x)$ が実関数の場合には, $f^*(x) = f(x)$ で, $f(x)f^*(x) = f^2(x)$ となる)。さて, 上式を計算すると

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f^*(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\right\} f^*(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)f^*(x)e^{i\omega x}\,d\omega\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{i\omega x}\,dx\right\} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F^*(\omega)\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
F^*(\omega) &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right\}^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{i\omega x}\,dx
\end{aligned}$$

の関係を用いた (テキスト P.78 問題 3-2 3. 参照)。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \tag{3.50}$$

上式を**パーシバルの等式**という。パーシバルの等式には**フーリエ級数 (係数) に対するパーシバルの等式** (テキスト P.62 式 (2.48)) と**フーリエ変換に対するパーシバルの等式**の 2 種類あるので混同しないこと。ここで,

$$E(\omega) = |F(\omega)|^2$$

を**エネルギースペクトル**という。

[フーリエ積分と積分方程式への応用]

次の積分方程式をみたす関数 $f(x)$ を求める問題を考える。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dx = \begin{cases} k & (0<k<1) \\ 0 & (\text{その他の } k) \end{cases}$$

(解) 与式の変数 k を ω に置き換えて, 与式を $F(\omega)$ とおけば

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \begin{cases} \omega & (0<\omega<1) \\ 0 & (\text{その他の}\omega) \end{cases}$$

となり, $F(\omega)$ は $f(x)$ のフーリエ変換となっていることがわかる。したがって, $F(\omega)$ をフーリエ逆変換すれば, 関数 $f(x)$ を求めることができる。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \omega e^{i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{1} \omega\left(\frac{e^{i\omega x}}{ix}\right)'\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\left[\omega\left(\frac{e^{i\omega x}}{ix}\right)\right]_0^1 - \frac{1}{ix}\int_0^1 e^{i\omega x}\,d\omega\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{e^{ix}}{ix} + \frac{1}{x^2}\left[e^{i\omega x}\right]_0^1\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{e^{ix}-1}{x^2} - \frac{ie^{ix}}{x}\right\} \end{aligned}$$

(別解) 与式を $F(\omega)$ とおくと, これは f(x) のフーリエ変換 ($x \to \omega$ の変換) である。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = \begin{cases} \omega & (0<\omega<1) \\ 0 & (\text{その他の}\omega) \end{cases}$$

ここで, 与式をもう一度フーリエ変換 ($\omega \to x$ の変換) すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega &= \int_0^1 \omega e^{-i\omega x}\,d\omega \\ &= \int_0^1 \omega\left(\frac{e^{-i\omega x}}{-ix}\right)'\,d\omega \\ &= \left[\omega\left(\frac{e^{-i\omega x}}{-ix}\right)\right]_0^1 + \frac{1}{ix}\int_0^1 e^{-i\omega x}\,d\omega \\ &= \frac{e^{-ix}}{-ix} + \frac{1}{x^2}\left[e^{-i\omega x}\right]_0^1 \\ &= \frac{ie^{-ix}}{x} + \frac{e^{-ix}-1}{x^2} \end{aligned}$$

が得られるが, フーリエ変換に関する性質 $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](x) = 2\pi f(-x)$ より

$$\frac{ie^{-ix}}{x} + \frac{e^{-ix}-1}{x^2} = 2\pi f(-x)$$

$x \to -x$ の置換を行えば

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{e^{ix}-1}{x^2} - \frac{ie^{ix}}{x}\right\}$$

パーシバルの等式のまとめ

$$\text{パーシバルの等式}\begin{cases}\text{フーリエ級数 (係数) に対するパーシバルの等式}\begin{cases}\text{周期 } 2\pi\\ \text{周期 } 2L\end{cases}\\ \text{フーリエ変換に対するパーシバルの等式}\end{cases}$$

フーリエ級数 (係数) に対するパーシバルの等式

周期 2π	周期 $2L$
$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \pi\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}$	$\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = L\left\{\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right\}$
$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert c_n\rvert^2$	$\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = 2L\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert c_n\rvert^2$

フーリエ変換に対するパーシバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$